Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques - Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2020/2021
Filière MIP, Module M112
Responsable : PROF. JAWAD SALHI

Corrigé de la série de Travaux-Dirigés : Structures algébriques : Groupes, Anneaux et Corps

Exercice 1
Soit G un groupe d'élément neutre e tel que $\forall x \in G, x^2 = e$. Montrer que G est abélien.
Solution :

Suppposons que tout carré soit égal à l'élément neutre. Alors

$$xy = y^2xyx^2 = y(yxyx)x = y(yx)^2x = yex = yx.$$

Autre méthode : Soit $x, y \in G$. En utilisant le fait que pour tout $z \in G$ on a $z^2 = 1$, i.e. $z = z^{-1}$, on en déduit que

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

et G est abélien.

Exercice 2
Soient $(G, \star)$ un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes de G. On suppose que $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G. Montrer que $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.
Solution :

Raisonnons par l'absurde et supposons que $H_1 \not\subseteq H_2$ et $H_2 \not\subseteq H_1$. Alors, il existe $x_1 \in H_1$, $x_1 \notin H_2$ et il existe $x_2 \in H_2$, $x_2 \notin H_1$. Comme $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe, $x_1 \star x_2 \in H_1 \cup H_2$. Si $x_1 \star x_2 \in H_1$, alors $x_2 = x_1' \star (x_1 \star x_2) \in H_1$, ce qui est absurde. De même, on parvient à une absurdité en supposant $x_1 \star x_2 \in H_2$. D'où le résultat.

Exercice 3 Soit G un groupe. Montrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de G :

1. $\mathcal{Z}(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$ ($\mathcal{Z}(G)$ s'appelle le centre de G).
2. $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ où $a \in G$ et H est un sous-groupe de G.

Solution :

1. 1_G est élément de $\mathcal{Z}(G)$ car $1_G y = y 1_G = y$ pour tout $y \in G$. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{Z}(G)$. Alors, pour tout $y \in G$, on a $x_1x_2y = x_1(x_2y) = (x_1y)x_2 = yx_1x_2$ et donc $x_1x_2 \in \mathcal{Z}(G)$. Enfin, si $x \in \mathcal{Z}(G)$, alors pour tout $y \in G$,
$$xy = yx \Longrightarrow xyx^{-1} = y \Longrightarrow yx^{-1} = x^{-1}y.$$
On en déduit que $x^{-1} \in \mathcal{Z}(G)$ qui est donc un sous-groupe de G.
2. Puisque H est un sous-groupe de G, $1_G \in H$ et donc $a1_Ga^{-1} \in aHa^{-1}$. Mais $a1_Ga^{-1} = 1_G$ et donc $1_G \in aHa^{-1}$. soient $x = aha^{-1}$ et $y = ah'a^{-1}$ deux éléments de aHa^{-1} avec donc $h, h' \in H$. On a $xy^{-1} = aha^{-1}\big(ah'a^{-1}\big)^{-1} = aha^{-1}\big(ah'^{-1}a^{-1}\big) = ahh'^{-1}a^{-1} \in aHa^{-1}$ puisque $hh'^{-1} \in H$. aHa^{-1} est donc bien un sous-groupe de G.

Exercice 4
Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et A, B deux sous-groupes de G. On note $AB = \{ab; a \in A, b \in B\}$. Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.
Solution :

$(\Rightarrow)$ Supposons que AB est un sous-groupe de G et montrons que $AB = BA$. Soit $x \in AB$. Alors $x^{-1} \in AB$ et donc $x^{-1} = ab$ pour certains $a \in A$ et $b \in B$. Par passage à l'inverse, on obtient : $x = b^{-1}a^{-1} \in BA$.
De même, si $y = ba \in BA$, alors $y^{-1} = a^{-1}b^{-1} \in AB$ et donc $y = (y^{-1})^{-1} \in AB$.
$(\Leftarrow)$ Supposons que $AB = BA$ et montrons que AB est un sous-groupe de G.

- Puisque A et B sont deux sous-groupes de G, alors $1_G \in A$ et $1_G \in B$ et donc $1_G = 1_G 1_G \in AB$.
- Soit $x = ab \in AB$ et $y = a'b' \in AB$. Alors, $xy = aba'b'$. Or, $ba' \in BA = AB$ et donc $ba' = a''b''$ avec $a'' \in A$ et $b'' \in B$. On en déduit que : $xy = aa''b''b' \in AB$.
- Soit $x = ab \in AB$. Alors, $x^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in BA = AB$.

Exercice 5
Soit G un groupe multiplicatif et $f \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array} \right.$ une application.
Montrer que f est un morphisme de groupes si et seulement si G est abélien.
Solution :

$(\Rightarrow)$ Supposons que f est un morphisme de groupes. Pour tous $x, y \in G$, on a

$$xy = f(x^{-1})f(y^{-1}) = f(x^{-1}y^{-1}) = (x^{-1}y^{-1})^{-1} = yx$$

et G est abélien.
$(\Leftarrow)$ Réciproquement, supposons que G est abélien. Soit $x, y \in G$. On a

$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$

et donc f est un morphisme de groupes.

Exercice 6 (Groupe des automorphismes intérieurs)
Soit $(G, \star)$ un groupe et $a \in G$. On note $\varphi_a \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a \star x \star a^{-1} \end{array} \right.$.

1. Montrer que φ_a est un morphisme de groupes.
2. Montrer que φ_a est bijectif et déterminer $(\varphi_a)^{-1}$.

L'ensemble $\mathcal{A} = \{\varphi_a,\ a \in G\}$, muni de la loi de composition, est un groupe (on a d'ailleurs $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$), appelé groupe des automorphismes intérieurs de G.

Solution : Laissé au lecteur

Exercice 7
Trouver tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.
Solution :

Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$. $Im(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ et donc $Im(f) = n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $n \geq 1$. Soit x un antécédant de n. On obtient alors : $2f(\frac{x}{2}) = f(x) = n$ et donc $\frac{n}{2} = f(\frac{x}{2}) \in n\mathbb{Z}$, ce qui est absurde. On a donc $n = 0$ et f est nul.

Exercice 8 (Congruence modulo un sous-groupe et théorème de Lagrange)
Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On appelle relation de congruence à droite modulo H sur G la relation définie pour tous $x, y \in H$ par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G. On note $H\backslash G$ l'ensemble quotient associé, et on l'appelle l'ensemble des classes à droites modulo H.
2. Montrer que $H\backslash G = \{Hx \mid x \in G\}$.
3. Montrer que $\mathrm{Card}(Hx) = \mathrm{Card}(H)$. (On rappelle que deux ensembles A et B ont le même cardinal s'il existe une bijection $f : A \to B$).
4. Supposons que G est fini. En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G.

Solution :

1. — $x\mathcal{R}x$ car $xx^{-1} = 1_G \in H$.
   — Si $x\mathcal{R}y$, alors $xy^{-1} \in H$, d'où $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$, donc $y\mathcal{R}x$.
   — Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $xz^{-1} = (xy^{-1})(yz^{-1}) \in H$, donc $x\mathcal{R}z$.
2. Montrons que $H\backslash G = \{Hx \mid x \in G\}$, où l'on a noté $H\backslash G$ l'ensemble quotient : $G/\mathcal{R} = \{\bar{x} | x \in G\}$. Soit $x \in G$. Pour tout $y \in G$, on a :

$$\begin{aligned} y \in \bar{x} \Leftrightarrow x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow xy^{-1} \in H \\ &\Leftrightarrow \exists h \in H : xy^{-1} = h \\ &\Leftrightarrow \exists h \in H : y^{-1} = x^{-1}h \\ &\Leftrightarrow \exists h \in H : y = h^{-1}x \\ &\Leftrightarrow y \in Hx \end{aligned}$$

   Donc : $H\backslash G = \{\bar{x} | x \in G\} = \{Hx \mid x \in G\}$.
3. Montrons que $\mathrm{Card}(Hx) = \mathrm{Card}(H)$. Soit $x \in G$ et considérons l'application $\varphi_x : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & Hx \\ h & \longmapsto & hx. \end{array}$
   — φ_x est injective : Soit $h_1, h_2 \in H$ tel que $\varphi_x(h_1) = \varphi_x(h_2)$. alors $h_1x = h_2x$ et en multipliant à droite par x^{-1}, on obtient : $h_1 = h_2$.
   — φ_x est surjective : Soit $y \in Hx$. Par définition de Hx, il existe $h \in H$ tel que $y = hx = \varphi_x(h)$. D'où φ_x est bijective et donc $\mathrm{Card}(Hx) = \mathrm{Card}(H)$.
4. Supposons que G est fini. Montrons que $\mathrm{Card}(H)$ divise $\mathrm{Card}(G)$. Les classes d'équivalences forment une partition de G, donc s'il y a k classes, alors $\mathrm{Card}(G) = k\,\mathrm{Card}(H)$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(G) = \sum_{\bar{x} \in G/\mathcal{R}} \mathrm{Card}(\bar{x}) &= \sum_{\bar{x} \in G/\mathcal{R}} \mathrm{Card}(Hx) \\ &= \sum_{\bar{x} \in G/\mathcal{R}} \mathrm{Card}(H) \\ &= \mathrm{Card}(H) \sum_{\bar{x} \in G/\mathcal{R}} 1 \\ &= \mathrm{Card}(H)\,\mathrm{Card}(G/\mathcal{R}). \end{aligned}$$

   D'où le résultat.

Exercice 9 (Anneau de Boole)
Soit A un anneau tel que tout élément de A soit idempotent (i.e. $\forall x \in A, x^2 = x$).

1. Si $x \in A$ montrer que $2x = 0$. Montrer que A est commutatif.
2. Montrer que si $x, y \in A$ alors $xy(x + y) = 0$. Que dire si A est intègre ?

Solution :

1. Soit $x \in A$. Alors $(2x)^2 = 2x$ donc $4x^2 = 2x$, ce qui entraine $4x = 2x$ et donc $2x = 0$. Ce qui s'écrit encore $x = -x$.
   Montrons que A est commutatif. Soit $x, y \in A$, alors $x + y \in A$. Ainsi, par définition de A, on obtient $(x + y)^2 = x + y$ et donc $x^2 + xy + yx + y^2 = x + y = x^2 + y^2$. D'où, $xy + yx = 0$ et donc $xy = -yx = yx$. Ce qui montre que A est commutatif.
2. Soit $x, y \in A$, alors $xy(x + y) = xyx + xy^2 = x^2y + xy^2 = 2xy = 0$.
   Sopposons que A est intègre. Alors A a au plus deux éléments. En effet, sinon il existe $x, y \in A$ distincts et différents de 0. Donc $(x + y) \neq 0$ (car sinon $x = -y = y$) et A étant intègre $xy(x + y) \neq 0$, absurde.

Exercice 10 (Eléments nilpotents d'un anneau)
Soit A un anneau. Un élément a de A est dit nilpotent si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1. Soit $(a, b) \in A^2$. Montrer que, si a est nilpotent et si $ab = ba$, alors ab est nilpotent.
2. Soit $a \in A$ nilpotent. Montrer que $1 - a$ est inversible dans A et exprimer $(1 - a)^{-1}$.
3. Soit $(a, b) \in A^2$. Montrer que, si a et b sont nilpotents et $ab = ba$, alors $a + b$ est nilpotent.

Solution : Laissé au lecteur.

Exercice 11 (Anneau des entiers de Gauss)
On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. Donner ses éléments inversibles.

$\mathbb{Z}[i]$ est appelé l'anneau des entiers de Gauss.
Solution :

1. On a $1 = 1 + 0 \times i$ donc $1 \in \mathbb{Z}[i]$. Soient z_1 et z_2 dans $\mathbb{Z}[i]$. Il existe a_1, b_1, a_2 et b_2 dans $\mathbb{Z}$ tels que $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. On a alors
$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$
   et comme $a_1 - a_2, b_1 - b_2, a_1a_2 - b_1b_2$ et $a_1b_2 + a_2b_1$ appartiennent à $\mathbb{Z}$, $z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ et $z_1z_2 \in \mathbb{Z}[i]$.
2. Soit $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]^\times$, où $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors, il existe $z' = a' + ib' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$. Donc $|z|^2|z'|^2 = 1$. Or, comme $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$, alors $|z|^2, |z'|^2 \in \mathbb{N}$. Ainsi : $|z|^2 = |z'|^2 = 1$. Donc $a^2 + b^2 = 1$ et puisque $a, b \in \mathbb{Z}$, alors
$$\begin{cases} a^2 = 1 \text{ et } b^2 = 0 \\ \text{ou} \\ a^2 = 0 \text{ et } b^2 = 1 \end{cases}$$

et donc $z \in \{-1, 1, i, -i\}$. D'où $\mathbb{Z}[i]^\times \subset \{-1, 1, i, -i\}$.
Inversement, il est facile de vérifier que $\{-1, 1, i, -i\} \subset \mathbb{Z}[i]^\times$. D'où l'égalité $\mathbb{Z}[i]^\times = \{-1, 1, i, -i\}$.

Exercice 12
Soient $(K, +, \cdot)$ et $(L, +, \cdot)$ deux corps et soit $f : K \to L$ un morphisme d'anneaux.

1. Montrer que si $x \in K \setminus \{0_K\}$, alors $f(x)$ est inversible et déterminer son inverse.
2. En déduire qu'un morphisme de corps est injectif.

Solution :

1. Soit $x \in K \setminus \{0_K\}$. Alors on a $x \cdot x^{-1} = 1_K$. On applique f à cette identité, et en utilisant que f est un morphisme d'anneaux, on trouve $f(x) \cdot f\left(x^{-1}\right) = 1_L$. Ainsi, $f(x)$ est inversible, d'inverse $f\left(x^{-1}\right)$.
2. Il suffit de démontrer que le noyau de f est réduit à 0_K. Mais si $f(x) = 0$, alors $x \notin K \setminus \{0_K\}$ d'après la question précédente, et donc $x = 0$.

Exercice 13
Montrer que tout anneau intègre et fini est un corps.
Solution :

Soit $a \in A$ non nul. L'application $f_a \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \right.$ est injective. En effet, puisque A est un anneau intègre et a est non nul, pour tous $x, y \in A$, on a

$$f_a(x) = f_a(y) \Longrightarrow ax = ay \Longrightarrow ax - ay = 0 \Longrightarrow a(x - y) = 0 \Longrightarrow x = y.$$

Et comme A est un ensemble fini, toute injection de A dans A est une bijection. Ainsi f_a est bijective. Soit $b \in A$ l'antécédent de 1 par f_a. Alors : $ab = f_a(b) = 1$.
On a montré que pout tout $a \in A$ non nul, $\exists b \in A$ tel que $ab = 1$. De plus, comme A est intègre, alors on aussi $ba = 1$ et donc b est l'inverse de a. En effet, puisque $ab = 1$, alors : $a(ba - 1) = a(ba) - a = (ab)a - a = 1 \times a - a = a - a = 0$. Or $a \neq 0$ et A est intègre, donc $ba - 1 = 0$, i.e, $ba = 1$. D'où le résultat.

Exercice 14
Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. On note :

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$

Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{d}], +, \times)$ est un corps.
Solution :

On va montrer qu'il s'agit d'un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$. Remarquons d'abord que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \subset \mathbb{R}$ et que $1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. soient $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. On les écrit $x = a + b\sqrt{d}$ et $y = a' + b'\sqrt{d}$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$. Alors :

$$\begin{aligned} x - y &= \left(a - a'\right) + \left(b - b'\right)\sqrt{d} \\ xy &= \left(aa' + dbb'\right) + \left(ab' + a'b\right)\sqrt{d} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $x - y$ et $xy \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. D'autre part, si $x \neq 0$, on peut multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjugée $a - b\sqrt{d}$ et l'on obtient

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - b^2 d} = \frac{a}{a^2 - b^2 d} - \frac{b}{a^2 - b^2 d}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$$

et donc $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Remarquons qu'il était possible de multiplier par la quantité conjuguée qui est non nulle car $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. D'où le résultat.

Exercice 15 (Endomorphisme du corps $\mathbb{R}$)
On veut montrer que le seul endomorphisme du corps $\mathbb{R}$ est l'identité. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps (ou d'anneaux).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f(x) \in \mathbb{R}^+$.
3. Montrer que f est croissante.
4. Conclure.

Solution :

1. Puisque f est un morphisme d'anneaux, alors f(1)=1 et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(n.1) = nf(1) = n$.
   Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, on a : $p = f(p) = f(qx) = qf(x)$. Donc $f(x) = \frac{p}{q} = x$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a $f(x) = f((\sqrt{x})^2) = (f(\sqrt{x}))^2 \in \mathbb{R}^+$.
3. soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq y$. Comme $y - x \geq 0$, alors d'après la question (2) on a : $f(y - x) = f(y) - f(x) \geq 0$. Donc $f(x) \leq f(y)$. Ce qui montre que f est croissante.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe deux suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ convergentes vers x telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\, r_n := \frac{E(10^n x)}{10^n} \leq x < s_n := \frac{E(10^n x)}{10^n} + \frac{1}{10^n},$$
   où $E(\cdot)$ désigne la fonction partie entière.
   En utilisant le fait que f est croissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(r_n) = r_n \leq f(x) \leq f(s_n) = s_n$. Les suites extrémités convergent vers x et donc $f(x) = x$. Ainsi le seul endomorphisme d'anneaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'identité.

Corrigé de la série de Travaux-Dirigés :
Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1

1. Déterminer le reste R de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $B = X - a$ où $a \in \mathbb{K}$.
2. Déterminer de deux manières le reste R de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par $B = (X - a)^2$ où $a \in \mathbb{K}$.

Solution :

1. La division euclidienne de P par $X - \lambda$ s'écrit :

$$P = (X - \lambda)Q + R \tag{1}$$

pour certains $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec : $\deg(R) < 1$, donc en fait R est un polynôme constant. Evaluons (1) en λ pour obtenir : $P(\lambda) = (\lambda - \lambda)Q(\lambda) + R(\lambda) = R$.

2. — **Première méthode :** En effectuant la division euclidienne de P par $(X - a)^2$, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R = \alpha X + \beta \in \mathbb{K}_1[X]$ tels que $P = (X - a)^2 Q + \alpha X + \beta$. On en déduit, après évaluation en a, que $P(a) = \alpha a + \beta$. De plus,

$$P' = 2(X - a)Q + (X - a)^2 Q' + \alpha$$

et donc, après évaluation en a, on obtient : $\alpha = P'(a)$. D'où :

$$R = P'(a)X + P(a) - aP'(a) = P(a) + (X - a)P'(a).$$

— **Deuxième méthode :** D'après la formule de Taylor en a, pour $n = \deg(P)$ (on peut supposer $n \geqslant 2$ car sinon $Q = 0$ et $R = P$) :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = P(a)+P'(a)(X-a)+(X-a)^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2}.$$

Par unicité dans la division euclidienne, on en déduit que $R = P(a) + P'(a)(X - a)$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^n - 1$. Effectuer la division euclidienne de P_n par P_m.

Solution :

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. La division euclidienne de n par m s'écrit $n = qm + r$ où $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ et $0 \leq r < m$. Ainsi : $X^n - 1 = X^{qm+r} - 1$ et donc

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= X^{qm+r} - X^r + X^r - 1 = X^r\Big(\left(X^m\right)^q - 1\Big) + X^r - 1 \\ &= X^r\Big(1 + X^m + (X^m)^2 + \cdots + (X^m)^{q-1}\Big)(X^m - 1) + X^r - 1. \end{aligned}$$

Puisque $\deg(X^r-1) \leq r < m$ (si $r \geq 1$ $\deg(X^r-1)=r$ et si $r=0$, $\deg(X^r-1)=-\infty$), la division euclidienne est achevée. Le quotient est $Q = X^r\Big(1+X^m+(X^m)^2+\cdots+(X^m)^{q-1}\Big)$ et le reste est $R = X^r-1$.

Exercice 3

1. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant : $P(X+1) = P(X)$.
2. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant : $P(X^2) = (X^2+1)\times P \quad (\star)$.

Solution :

1. Raisonnons par analyse-synthèse. Soit P un tel polynôme et posons $Q = P - P(0)$. On prouve sans peine que $Q(X+1) = Q(X)$ et $Q(0) = 0$. On en déduit par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) = 0$. Le polynôme Q admet donc une infinité de racines : $Q = 0$ et donc P est constant. Réciproquement, il est clair qu'un polynôme P constant vérifie $P(X+1) = P(X)$.
2. Raisonnons par analyse-synthèse. Tout d'abord, remarquons que le polynôme nul verifie bien $(\star)$. Supposons qu'il existe un polynôme non nul vérifiant $(\star)$. Alors, en calculant le degré de chaque membre, on trouve : $2\deg P = 2 + \deg P$. D'où : $\deg P = 2$. Ainsi, s'il existe un polynôme non nul vérifiant $(\star)$, alors $\deg P = 2$. Réciproquement, soit $P = aX^2+bX+c$, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$ (seuls ces polynômes peuvent être solutions de $(\star)$). Alors, $P(X^2) = aX^4+bX^2+c$ et $(1+X^2)\times P = aX^4+bX^3+(c+a)X^2+bX+c$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P \quad \text{vérifie} \quad (\star) &\Leftrightarrow aX^4+bX^2+c = aX^4+bX^3+(c+a)X^2+bX+c \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} b & = 0 \\ c+a & = b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} b & = 0 \\ c & = -a \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow P = aX^2 - a \quad \text{avec} \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

   Conclusion : Les polynôme qui vérifient $(\star)$ sont les polynômes $P = aX^2 - a$ avec $a \in \mathbb{K}$. (Il ne faut pas oublier que le polynôme nul est solution de $(\star)$).

Exercice 4

1. Quel est le reste de la division euclidienne du polynôme $A = X^n + X + b$, $n \in \mathbb{N}^*$ par $B = (X-a)^2$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Trouver a et b réels tel que le polynôme $P = X^3 + aX + b$ admette le nombre $z = 1 + i$ comme racine.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère le polynôme P défini par $P = \alpha X^{n+1} + \beta X^n + 1$. Déterminer les réels α et β pour que P soit divisible par $(X-1)^2$.
4. Déterminer $n \in \mathbb{N}$ pour que le polynôme $(X+1)^{2n+1} + X^{2n+2}$ soit divisible par le polynôme $X^2 + X + 1$.
5. Soient m, n et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2}$ divisible par $X^2 + X + 1$.

Solution : Déjà fait durant la séance du cours.

Exercice 5
Déterminer la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ du polynôme

$$P = (X+1)^7 - X^7 - 1$$

sachant que j est une racine multiple de P.

Solution :
On a $P(j) = 0$. De même, on vérifie que $P'(j) = 0$. En revanche, $P''(j) = 42 \neq 0$. Ainsi, le nombre complexe j est une racine de P de multiplicité 2. Puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{j} = j^2$ en est également une racine de multiplicité 2. De plus, les nombres 0 et -1 sont des racines évidentes de P. Le polynôme P est donc divisible par

$$Q := X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2 = X(X+1)(X^2+X+1)^2.$$

D'autre part, en appliquant la formule du Binôme, on obtient :

$$P = \sum_{k=0}^{7} C_7^k X^k - X^7 - 1 = \sum_{k=1}^{6} C_7^k X^k.$$

P est donc de degré 6. Comme $\deg P = \deg Q = 6$ et $P|Q$, alors $P = \lambda Q$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Finalement, puisque Q est unitaire, alors $\lambda = \operatorname{dom} P = C_7^6 = 7$ et donc :

$$P = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2.$$

Exercice 6
On considère le polynôme $P = X^5 - 1$.

1. Décomposer P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire les racines de $Q = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{C}$.
3. Décomposer Q dans $\mathbb{R}[X]$.
4. En déduire la valeur de $r_1 = \cos(\frac{2\pi}{5})$ et $r_2 = \cos(\frac{4\pi}{5})$.

Solution :

1. Cherchons les racines de P dans $\mathbb{C}$, c-à-d les nombres complexes z tels que $z^5 - 1 = 0$. On a :

$$\begin{aligned} z^5 - 1 = 0 &\Leftrightarrow z^5 = 1 \\ &\Leftrightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{5}}, \quad k \in \{0, \cdots, 4\}. \end{aligned}$$

   D'où, dans $\mathbb{C}[X]$: $P = \prod_{k=0}^{4}(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}})$.

2. On a : $X^5 - 1 = (X-1)Q$. De plus, d'après la question 1, on a :

$$X^5 - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{4}(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}).$$

Ainsi, après simplification :

$$Q = \prod_{k=1}^{4}(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}).$$

D'où, les racines de Q dans $\mathbb{C}$ sont :

$$e^{i\frac{2k\pi}{5}},\ k \in \{1, \cdots, 4\}.$$

3. Dans $\mathbb{C}[X]$, on a : $Q = \prod_{k=1}^{4}(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}})$. Or $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{8\pi}{5}}$ sont conjugués ainsi que $e^{i\frac{4\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{6\pi}{5}}$. Donc, dans $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$\begin{aligned} Q &= (X - e^{i\frac{2\pi}{5}})(X - e^{i\frac{8\pi}{5}})(X - e^{i\frac{4\pi}{5}})(X - e^{i\frac{6\pi}{5}}) \\ &= (X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X + 1). \end{aligned}$$

► En général, pour trouver la factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ à partir de sa factorisation en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$, on regroupe les racines non réelles du polynôme par paires de conjugués $(a, \bar{a})$ afin d'obtenir un polynôme à coefficients réels $(X - a)(X - \bar{a}) = X^2 - 2Re(a)X + |a|^2$.

4. Posons $r_1 = \cos(\frac{2\pi}{5})$ et $r_2 = \cos(\frac{4\pi}{5})$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} Q &= (X^2 - 2r_1X + 1)(X^2 - 2r_2X + 1) \\ &= X^4 + (-2r_1 - 2r_2)X^3 + (2 + 4r_1r_2)X^2 + (-2r_1 - 2r_2)X + 1. \end{aligned}$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients et donc :

$$\begin{cases} -2r_1 - 2r_2 & = 1 \\ 2 + 4r_1r_2 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 & = -\frac{1}{2} \quad (\clubsuit) \\ r_1r_2 & = -\frac{1}{4} \quad (\spadesuit). \end{cases}$$

$(\clubsuit)$ donne : $r_2 = -\frac{1}{2} - r_1$. Ensuite, en injectant l'expression de r_2 dans $(\spadesuit)$, on trouve :

$$r_1^2 + \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{4} = 0.$$

Donc :

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{ou} \quad r_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, alors $r_1 = \cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$. Donc $r_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et par suite $r_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 7

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles F suivantes :

1. $\frac{X^5}{X^4 - 1}$.
2. $\frac{X}{(X^2+X+1)(X+1)^3}$.

Solution :

1. — **Recherche de la partie entière** : Commençons par chercher la partie entière de $\frac{X^5}{X^4-1}$, ce qui revient à chercher le quotient de la division euclidienne de X^5 par $X^4 - 1$. Cette division s'écrit : $X^5 = X(X^4 - 1) + X$, donc X est la partie entière cherchée.

— **Forme de la décomposition en éléments simples** : Pour obtenir la forme de la DES de la fraction F dans $\mathbb{C}(X)$, on commence par factoriser le dénominateur $X^4 - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Or, dans $\mathbb{C}[X]$, on a :

$$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i).$$

Du coup, la décomposition en éléments simples de $\frac{X^5}{X^4-1}$ est :

$$\frac{X^5}{X^4-1} = \frac{X^5}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)} = X + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}, \qquad \bigstar$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sont à déterminer.

— **Prise en compte de l'imparité** : On a :

$$\begin{aligned} F(X) = -F(-X) &= -\Big[-X + \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{-X+1} + \frac{c}{-X-i} + \frac{d}{-X+i} \Big] \\ &= X + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+i} + \frac{d}{X-i}. \end{aligned}$$

Ceci est une "nouvelle" décomposition de F en éléments simples. Une telle décomposition étant unique, nous obtenons par identification des coefficients : $b = a$ et $c = d$.

— **Calcul de** a : Multiplions $\bigstar$ par $X - 1$:

$$\frac{X^5}{(X+1)(X^2+1)} = X(X-1) + a + (X-1)\Big[\frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i} \Big],$$

puis évaluons en 1, pour obtenir : $a = \frac{1}{4}$.

— **Calcul de** c : Multiplions $\bigstar$ par $X - i$:

$$\frac{X^5}{(X^2-1)(X+i)} = X(X-i) + c + (X-i)\Big[\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{d}{X+i} \Big],$$

puis évaluons en i, pour obtenir : $c = -\frac{1}{4}$.

— **Conclusion** : Finalement, on obtient :

$$\frac{X^5}{X^4-1} = X + \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i} \Big].$$

2. — **Recherche de la partie entière** : Comme $\deg F < 0$, la partie entière est nulle.

— **Forme de la décomposition en éléments simples** : Pour obtenir la forme de la DES de la fraction F dans $\mathbb{C}(X)$, on commence par factoriser le dénominateur $(X^2 + X + 1)(X+1)^3$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Or, dans $\mathbb{C}[X]$, on a :

$$(X^2 + X + 1)(X+1)^3 = (X-j)(X-j^2)(X+1)^3.$$

Du coup, la décomposition cherchée s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{X}{(X^2+X+1)(X+1)^3} &= \frac{X}{(X-j)(X-j^2)(X+1)^3} \\ &= \frac{a}{X-j} + \frac{b}{X-j^2} + \frac{c}{(X+1)^3} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{e}{X+1}, \qquad \bigstar \end{aligned}$$

où $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ sont à déterminer.

— **Utilisation de la conjugaison** : Conjuguons ★ :

$$F(X) = \overline{F(X)} = \frac{\bar{a}}{X-j^2} + \frac{\bar{b}}{X-j} + \frac{\bar{c}}{(X+1)^3} + \frac{\bar{d}}{(X+1)^2} + \frac{\bar{e}}{X+1}$$

Ceci est une "nouvelle" décomposition de F en éléments simples. Une telle décomposition étant unique, nous obtenons par identification des coefficients : $b = \bar{a}$.

— **Calcul de** a : Multiplions ★ par $X-j$, puis évaluons en j pour obtenir : $a = \frac{j}{(j-j^2)(j+1)^3} = \frac{ij}{\sqrt{3}}$.

— **Calcul de** c : Multiplions ★ par $(X+1)^3$, puis évaluons en -1, pour obtenir : $c = -1$.

— **Utilisation du comportement en** ∞ : Pour calculer d et e, nous ne pouvons plus multiplier par $(X+1)^2$ et $(X+1)$ respectivement puis évaluer en -1, car le membre de gauche aura alors un pôle en -1. Pour trouver des équations faisant intervenir d et e, une solution consiste à multiplier par une puissance de X, à évaluer ensuite en $x \in \mathbb{R}$ quelconque, puis à faire tendre x vers ∞.
Ici, multiplions ★ par X :

$$\frac{X^2}{(X^2+X+1)(X+1)^3} = \frac{aX}{X-j} + \frac{bX}{X-j^2} + \frac{cX}{(X+1)^3} + \frac{dX}{(X+1)^2} + \frac{eX}{X+1},$$

puis évaluons en $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\frac{x^2}{(x^2+x+1)(x+1)^3} = \frac{ax}{x-j} + \frac{bx}{x-j^2} + \frac{cx}{(x+1)^3} + \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{ex}{x+1},$$

et enfin faisons tendre x vers $+\infty$ pour obtenir : $0 = a+b+e$. Par conséquent : $e = -a-b = -a-\bar{a} = -2Re(a) = 1$.

► **Remarque** : Il n'est pas correct de "faire tendre X vers ∞" car X est un polynôme et non un nombre.

— **Calcul de** d : Nous ne pouvons pas utiliser la technique précédente pour calculer d, car nous devrions pour cela multiplier par X^2, et certains termes à droite auraient alors une limite infinie. Evaluons simplement ★ en 0, pour obtenir : $0 = \frac{a}{-j} + \frac{b}{-j^2} + c + d + e$. Ainsi, sachant que $a = \frac{ij}{\sqrt{3}}$: $d = (\frac{a}{j} + \frac{\bar{a}}{j^2}) - c - e = -c - e = 0$.

— **Conclusion** : Finalement, on obtient :

$$\frac{X}{(X^2+X+1)(X+1)^3} = \frac{i}{\sqrt{3}}\Big(\frac{j}{X-j} - \frac{j^2}{X-j^2}\Big) - \frac{1}{(X+1)^3} + \frac{1}{X+1}.$$

Exercice 8

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles F suivantes :

1. $\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}$.
2. $\frac{X^4}{(X+3)(X^2+X+3)}$.
3. $\frac{1}{(X-1)^2(X^2+4)}$.

Solution :

1. — Forme de la décomposition en éléments simples : La partie entière est nulle, donc pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2} \quad ★.$$

- Calcul de a : On multiplie ★ par $(X+1)^2$ puis on évalue en -1 pour obtenir : $a=2$.
- Calcul de c : On recommence. On multiplie ★ par $X+2$ puis on évalue en -2 pour obtenir : $c=1$.
- Calcul de b : On ne peut malheureusement pas reproduire le raisonnement précédent pour calculer b. Multiplier ★ par $X+1$ puis évaluer en -1 nous conduirait en effet à diviser par 0 à cause du terme $(X+1)^2$. Cependant, plusieurs approches sont envisageables, **AU CHOIX** :
  - On peut multiplier ★ par X puis passer à la limite en $+\infty$ pour obtenir : $0 = 0+b+c$, donc : $b=-c=-1$. On obtient généralement ainsi une équation simple et agréable.
  - On peut évaluer ★ en un point, par exemple en 0 pour obtenir : $\frac{3}{2} = a+b+\frac{c}{2}$, ce qui donne aussi : $b=-1$. Les équations qu'on obtient en évaluant en un point sont souvent un peu plus compliquées que celles qu'on obtient en passant à la limite en $+\infty$.
- Conclusion : Finalement, on obtient :

$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{2}{(X+1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X+2}.$$

2. — Partie entière : La division euclidienne de X^4 par $(X+3)(X^2+X+3)$ s'écrit :

$$X^4 = (X+3)(X^2+X+3)(X-4) + 10X^2 + 15X + 36,$$

donc la partie entière cherchée vaut $X-4$.
- Forme de la décomposition en éléments simples : Pour certains $a,b,c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X^4}{(X+3)(X^2+X+3)} = X - 4 + \frac{a}{X+3} + \frac{bX+c}{X^2+X+3}.$$

En tenant compte de la division euclidienne calculée juste avant, on peut aussi dire que :

$$\frac{10X^2+15X+36}{(X+3)(X^2+X+3)} = \frac{a}{X+3} + \frac{bX+c}{X^2+X+3} \quad \bigstar.$$

► Il est toujours plus facile de calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples quand la partie entière est nulle.
- Calcul de a : On multiplie ★ par $X+3$ puis on évalue en -3 pour obtenir : $a=9$.
- Calcul de b : On multiplie ★ par X puis on passe à la limite en $+\infty$ pour obtenir : $10 = a+b$ et donc $b=1$.
- Calcul de c : On peut évaluer ★ par exemple en 0 pour obtenir : $4 = \frac{a}{3} + \frac{c}{3}$ et donc : $c = 12 - a = 3$.
- Conclusion : Finalement, on obtient :

$$\frac{X^4}{(X+3)(X^2+X+3)} = X - 4 + \frac{9}{X+3} + \frac{X+3}{X^2+X+3}.$$

3. — Forme de la décomposition en éléments simples : La partie entière est nulle, donc pour certains $a,b,c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{(X-1)^2(X^2+4)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2+4} \quad \bigstar.$$

— Calcul de a : On multiplie ★ par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 pour obtenir : $a=\frac{1}{5}$.
— Calcul de c et d : Le polynôme X^2+4 admet $2i$ et $-2i$ pour racines. On multiplie ★ par X^2+4 puis on évalue en $2i$ pour obtenir : $2ic+d=\frac{1}{(2i-1)^2}=\frac{1}{-3-4i}=\frac{-3+4i}{25}$.
Or c et d sont des RÉELS, donc par identification des parties réelles et imaginaires : $c=\frac{2}{25}$ et $d=-\frac{3}{25}$.
— Calcul de b : On multiplie ★ par X puis on passe à la limite en $+\infty$ pour obtenir : $0=b+c$ et donc $b=-c=-\frac{2}{25}$.
— Conclusion : Finalement, on obtient :

$$\frac{1}{(X-1)^2(X^2+4)}=\frac{1}{5(X-1)^2}-\frac{2}{25(X-1)}+\frac{2X-3}{25(X^2+4)}.$$

Exercice 9
Soit $P=X^8+X^6+2X^5+2X^3+X^2+1$.

1. Vérifier que -1 et $-j$ sont des racines de P. Déterminer leur ordre de multiplicité.
2. Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $G=\frac{(X^2-X+1)^2}{P}$. Décomposer G en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Solution :

1. On vérifie que $P(-1)=P'(-1)=0$ et $P''(-1)=20\neq 0$. Donc, -1 est une racine de P de multiplicité égale à 2. De plus, on a : $P(-j)=P'(-j)=0$ et $P''(-j)=2+18j\neq 0$. Donc, $-j$ est une racine de P de multiplicité égale à 2.
2. D'après la question 1, on a P est divisible par $(X+1)^2(X+j)^2$. Or, comme $P\in\mathbb{R}[X]$ et $-j$ est une racine de P de multiplicité 2, alors $-j^2$ est aussi racine de P de multiplicité 2. Ainsi, P est divisible par

$$Q:=(X+1)^2(X+j)^2(X+j^2)^2=(X+1)^2(X^2-X+1)^2=X^6+2X^3+1.$$

En effectuant la division euclidienne de P par Q, on obtient :

$$P=(X^2+1)(X^6+2X^3+1).$$

D'où, dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P=(X^2+1)(X+1)^2(X^2-X+1)^2$$

et dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P=(X+i)(X-i)(X+1)^2(X+j)^2(X+j^2)^2.$$

3. Soit $G=\frac{(X^2-X+1)^2}{P}=\frac{1}{(X^2+1)(X+1)^2}$.
— **Recherche de la partie entière** : Comme $\deg G<0$, alors la partie entière est nulle.
— **Forme de la décomposition en éléments simple dans** $\mathbb{R}(X)$: La décomposition cherchée s'écrit :

$$G=\frac{a}{(X+1)^2}+\frac{b}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2+1}\quad (\bigstar)$$

où $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ sont à déterminer.
— **Calcul de** a : On multiplie ★ par $(X+1)^2$ puis on évalue en -1, pour obtenir : $a=\frac{1}{2}$.

— **Calcul de c et d** : Le polynôme X^2+1 admet i et $-i$ pour racines. On multiplie ★ par X^2+1 puis on évalue en i, pour obtenir : $ci+d=\frac{1}{(i+1)^2}=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$. Or, c et d sont des réels, donc par identification des parties réelles et imaginaires : $c=-\frac{1}{2}$ et $d=0$.

— **Calcul de b** : On évalue par exemple ★ en 0 pour obtenir : $a+b+d=1$ et par suite $b=\frac{1}{2}$.

— **Conclusion** : Dans $\mathbb{R}(X)$, on a :

$$G=\frac{1}{2}\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{X}{X^2+1}.$$

Exercice 10

1. Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction (mise sous forme irréductible) $F_n=\frac{P}{X^n-1}$ où P est un polynôme de degré $\leq n-1$.
2. Application : Utiliser le résultat précédent pour décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ puis $\mathbb{R}(X)$ la fraction : $G=\frac{X^2}{X^3-1}$.

Solution :

1. Comme $\deg F_n<0$, la partie entière est nulle. Pour trouver la forme de la décomposition en éléments simple de F_n dans $\mathbb{C}(X)$, on commence d'abord par factoriser le dénominateur dans $C[X]$. Or, on sait que dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-z_k),$$

où $z_k:=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Donc : $F_n=\frac{P}{\prod_{k=0}^{n-1}(X-z_k)}$ et la décomposition cherchée s'écrit donc :

$$F_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{X-z_k},$$

où les $\lambda_k\in\mathbb{C}$ sont à déterminer. Posons $Q=X^n-1$. Alors, d'après le cours, on a : $\lambda_k=\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}=\frac{P(z_k)}{nz_k^{n-1}}=\frac{1}{n}z_kP(z_k)$. Donc :

$$F_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z_kP(z_k)}{X-z_k}.$$

2. Application : On a

$$G=\frac{X^2}{X^3-1}=\sum_{k=0}^{2}\frac{\lambda_k}{X-z_k},$$

avec $\lambda_k=\frac{1}{3}z_k^3=\frac{1}{3}$, où $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{3}}$, $k\in\{0,1,2\}$. D'où, dans $\mathbb{C}(X)$:

$$G=\sum_{k=0}^{2}\frac{1/3}{X-e^{\frac{2ik\pi}{3}}}=\frac{1}{3}\Big[\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X-j}+\frac{1}{X-j^2}\Big].$$

Pour obtenir la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, on regroupe les fractions conjuguées que l'on réduit au même dénominateur, pour obtenir finalement :

$$G=\frac{1}{3}\frac{1}{X-1}+\frac{1}{3}\frac{2X+1}{X^2+X+1}.$$

Exercice 11

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction : $F = \frac{X}{1+X^2+X^4}$.
2. En déduire la somme : $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{1+p^2+p^4}$.

Solution :

1. — Calcul de la partie entière : Comme $\deg F < 0$, la partie entière est nulle.
   — Factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ du dénominateur : On a, dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 \\ &= (X^2+1)^2 - X^2 \\ &= (X^2+X+1)(X^2-X+1). \end{aligned}$$

   Donc $F = \frac{X}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)}$.
   — Forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$: La décomposition cherchée s'écrit :

$$F = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1} \quad \bigstar.$$

   — On calcule a et b en multipliant $\bigstar$ par X^2+X+1, puis en évaluons en j. On obtient : $a = 0$ et $b = -\frac{1}{2}$.
   — On calcule c et d en multipliant $\bigstar$ par X^2-X+1, puis en évaluons en $-j$. On obtient : $c = 0$ et $d = \frac{1}{2}$.

   Finalement,

$$F = -\frac{1}{2}\frac{1}{X^2+X+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{X^2-X+1}.$$

2. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\frac{p}{1+p^2+p^4} = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2-p+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+p+1}.$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\Big[\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2-p+1} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2+p+1}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(p+1)^2-(p+1)+1} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2+p+1}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p^2+p+1} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2+p+1}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[1 + \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p^2+p+1} - \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p^2+p+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{n^2+n+1}\Big) = \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+n+1}. \end{aligned}$$

Corrigé de la série de Travaux-Dirigés : Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1

Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $F \cup G$ est un s.e.v de E, montrer que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Solution :

Raisonnons par l'absurde et supposons que $F \not\subseteq G$ et $G \not\subseteq F$, de sorte qu'il existe $x \in F$, $x \notin G$, et il existe $y \in G$, $y \notin F$. Le vecteur $x+y$ est dans le s.e.v $F \cup G$, donc $x+y \in F$ ou $x+y \in G$. Supposons par exemple $x+y \in F$. Comme F est un s.e.v et que $x \in F$, on a $(x+y)-x \in F$, c'est-à-dire $y \in F$, ce qui est absurde. D'où le résultat.

Exercice 2

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\} \\ G &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \quad \text{et} \quad b = 2c\}. \end{aligned}$$

Donner une base de F, de G et de $F \cap G$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Solution :

— Commençons par chercher une famille génératrice de F. On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid b = 2c - d\} \\ &= \{(a, 2c-d, c, d) \mid a,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1,0,0,0) + c(0,2,1,0) + d(0,-1,0,1) \mid a,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\Big(\overbrace{(1,0,0,0)}^{u_1}, \overbrace{(0,2,1,0)}^{u_2}, \overbrace{(0,-1,0,1)}^{u_3}\Big). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est donc une famille génératrice de F. On vérifie aisément qu'elle est libre. C'est donc une base de F.

— Pour G, on a :

$$\begin{aligned} G &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \quad \text{et} \quad b = 2c\} \\ &= \{(d, 2c, c, d) \mid c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(0,2,1,0) + d(1,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 \mid c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(u_1', u_2'), \end{aligned}$$

où : $u_1' = (0,2,1,0)$ et $u_2' = (1,0,0,1)$. Donc, la famille $\mathcal{B}' = (u_1', u_2')$ est donc une famille génératrice de G. Comme u_1' et u_2' ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{B}'$ est libre. C'est donc une base de G.

— Pour $F \cap G$, on écrit :

$$(a,b,c,d) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} a &= d \\ b &= 2c \\ d &= -b + 2c = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d, b = 2c \quad \text{et} \quad d = 0\} \\ &= \{(0, 2c, c, 0) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c \overbrace{(0,2,1,0)}^{u} \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(u). \end{aligned}$$

Donc $F \cap G$ est engendré par le vecteur u. De plus, comme $u \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, alors la famille $\mathcal{B}'' = (u)$ est libre. C'est donc une base de $F \cap G$.

— Tout d'abord, on a : $F + G \subset \mathbb{R}^4$. D'autre part, d'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

Ainsi : $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3

Soient F et G les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = x + z\}. \end{aligned}$$

1. Déterminer la dimension de F, puis la dimension de G.
2. Calculer $F \cap G$. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Solution :

1. — Pour déterminer la dimension de F, commençons par chercher une base de F. On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + 2z\} \\ &= \{(y + 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1,1,0) + z(2,0,1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(u_1, u_2), \end{aligned}$$

où : $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (2,0,1)$. Ainsi : (u_1, u_2) est une famille génératrice de F. De plus, comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, alors : (u_1, u_2) est libre. C'est donc une base de F et $\dim F = 2$.

— Pour G, on a :

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = x + z\} \\ &= \{(2y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2,1,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(u_3), \end{aligned}$$

où : $u_3 = (2,1,0)$. Ainsi : (u_3) est une famille génératrice de G. De plus, comme $u_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors : (u_3) est libre. C'est donc une base de G et $\dim G = 1$.

2. Pour $F \cap G$, on écrit :

$$(x,y,z) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z & = 0 \\ x & = 2y \\ z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Ainsi : $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. De plus, on a :

$$\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

D'où : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4
Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad 2x + y + z - t = 0\} \\ G &= \text{Vect}\Big((1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5)\Big). \end{aligned}$$

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$.
3. Déterminer un supplémentaire de F.

Solution :

1. On va déterminer une base de F. Pour cela, commençons par chercher une famille génératrice de F :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad 2x + y + z - t = 0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = -x - y \quad \text{et} \quad t = x\} \\ &= \{(x,y,-x-y,x) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x\overbrace{(1,0,-1,1)}^{u_1} + y\overbrace{(0,1,-1,0)}^{u_2} \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(u_1,u_2). \end{aligned}$$

   Ainsi : (u_1,u_2) est une famille génératrice de F. De plus, comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, alors (u_1,u_2) est libre. C'est donc une base de F et on a : $\dim F = 2$.

2. Comme : $(1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5) \in F$, alors : $G \subset F$. Ainsi : $\dim G \leq \dim F = 2$. Or, les deux vecteurs $(1,-2,1,1)$ et $(1,2,-3,1)$ ne sont pas colinéaires, alors : $2 \leq \dim G \leq 2$ et donc $\dim G = \dim F = 2$. En résumé : $\begin{cases} G \subset F \quad \text{et} \\ \dim G = \dim F = 2. \end{cases}$
   D'où : $F = G$.

3. En utilisant le théorème de la base incomplète, on va trouver deux vecteurs u_3 et u_4 de sorte que (u_1,u_2,u_3,u_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$. Ensuite, par le théorème de la base adaptée, $H = \text{Vect}(u_3,u_4)$ sera un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$. Pour cela, on peut choisir les vecteurs u_3 et u_4 parmi les vecteurs de la base canonique. On vérifie facilement ici que $u_3 = \overbrace{(1,0,0,0)}^{e_1}$ et $u_4 = \overbrace{(0,0,0,1)}^{e_4}$ convient. Donc : $H = \text{Vect}(e_1,e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5
On considère les deux ensembles suivants :

$$A = \{(x+y, x-y, 2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\};$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \,\text{et}\, y = 3z\}.$$

1. Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Solution :

1. On a :
   — $A = \text{Vect}\Big((1,1,0),(1,-1,2)\Big)$ est un plan vectoriel.
   — $B = \text{Vect}\Big((\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3})\Big) = \text{Vect}\Big((3,6,2)\Big)$ est une droite vectorielle.
2. Montrons maintenant que A et B sont supplémentaires :
   — $A \cap B = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car si on considère $u \in A \cap B$, alors,

$$u \in A \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : u = (x+y, x-y, 2y)$$
$$u \in B \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y) & = x-y, \\ x-y & = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y & = 0, \\ x-7y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

   Donc $u = (0,0,0)$.
   — $\dim A + \dim B = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
   Nous avons ainsi démontré que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Exercice 6
Soit : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$. Montrer que $\text{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution :

— Nous avons besoin d'abord d'une base de F. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$P \in F \Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = a(1-X)^3 + b(1-X)^2 + c(1-X) + d$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = -a \\ 3a+b & = 3a+b \\ 3a+2b+c & = -3a-2b-c \\ a+b+c+d & = a+b+c+d \end{cases} \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{et} \quad 2b + c = 0.$$

Ce calcul montre que $(1, X^2 - 2X)$ engendre F. Cette famille étant libre, c'est une base de F.

— Complétons-la en une base $(1, X^2 - 2X, X, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Par le théorème de la base adaptée, on en déduit que : $\text{Vect}(X, X^3)$ est UN supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7
$E = \mathbb{R}_4[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, déterminer une base de F et préciser sa dimension.
2. Montrer que $G = \text{Vect}(1, X, 1 + X + X^2)$ est un supplémentaire de F dans E.

Solution :

1. Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X]$. On a :

$$P \in F \Leftrightarrow P(0) = P'(0) = P'(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e & = 0 \\ d & = 0 \\ 4a + 3b + 2c + d & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow P = aX^4 + bX^3 - \frac{1}{2}(4a + 3b)X^2 = a(X^4 - 2X^2) + b\Big(X^3 - \frac{3}{2}X^2\Big).$$

Donc $F = \text{Vect}\left(X^4 - 2X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2\right)$. Cette écriture de F justifie le fait que F est un espace vectoriel. De plus, la famille $\left(X^4 - 2X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2\right)$ engendre F et comme elle est étagée en degrés, elle est libre. C'est donc une base de F et on a : $\dim F = 2$.

2. Montrons que $\mathbb{R}_4[X] = F \oplus G$. Comme $\dim F + \dim G = 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$, il reste simplement à montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Soit $P \in F \cap G$. Comme : $P \in G$ alors, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $P = a + bX + c(1 + X + X^2)$. De plus, on a : $P \in F$ et donc : $P(0) = P'(0) = P'(1) = 0$ et on trouve : $a = b = 0$ et $b + 3c = 0$. Ainsi : P est nul. D'où le résultat.

Exercice 8

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et :

$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}, \quad A = \complement_E^F = \{g \in E \mid g(0) \neq 0\}.$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Est-ce que A est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Montrer que, pour toute $g \in A$, la droite vectorielle $\mathbb{R}g$ est un supplémentaire de F dans E.

Solution :

1. — Il est clair que $F \subset E$ et que $0_E \in F$ (où on a noté 0_E l'application constante nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
   — Soient $f, h \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $(\lambda f + h)(0) = \lambda f(0) + h(0) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$, donc : $\lambda f + h \in F$. On conclut que F est sous-espace vectoriel de E.

   D'autre part, il est immédiat que A n'est pas un sous-espace vectoriel de E, car $0_E \notin A$.
2. Soit $g \in A$ fixée.
   — Commençons par montrer que $F \cap \mathbb{R}g = \{0_E\}$, ou encore : $F \cap \mathbb{R}g \subset \{0_E\}$. Soit $\varphi \in F \cap \mathbb{R}g$. Alors, $\varphi(0) = 0$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \alpha g$. Ainsi, $\alpha g(0) = \varphi(0) = 0$ et comme $g(0) \neq 0$ alors : $\alpha = 0$ et donc : $\varphi = \alpha g = 0_E$. Ceci montre que : $F \cap \mathbb{R}g = \{0_E\}$.
   — On veut montrer que $E = F + \mathbb{R}g$. Soit $\varphi \in E$. Il s'agit donc de montrer que φ se décompose linéairement sur F et $\mathbb{R}g$, c-à-d qu'il existe $f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que : $\varphi = f + \alpha g$. Raisonnons par analyse-synthèse.
     — **Analyse** : Supposons qu'une telle décomposition existe, c-à-d qu'il existe $f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que : $\varphi = f + \alpha g$. Alors : $\varphi(0) = f(0) + \alpha g(0) = \alpha g(0)$, donc : $\alpha = \frac{\varphi(0)}{g(0)}$, puis $f = \varphi - \alpha g = \varphi - \frac{\varphi(0)}{g(0)} g$.
     — **Synthèse** : Réciproquement, montrons que le couple (f, α) précédement trouvé convient. Notons donc $\alpha = \frac{\varphi(0)}{g(0)}$ et $f = \varphi - \frac{\varphi(0)}{g(0)} g$. Alors, on a bien : $\varphi = f + \alpha g$ avec $f(0) = \varphi(0) - \frac{\varphi(0)}{g(0)} g(0) = 0$ et donc $f \in F$. Ceci montre que le couple (f, α) convient.

On a ainsi montré que : $E = F + \mathbb{R}g$.

Finalement : F et $\mathbb{R}g$ sont deux sous-epaces vectoriels supplémentaires dans E, ou encore : $\mathbb{R}g$ est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 9

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (i.e. $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (i.e. $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que F et G sont supplémentaires.

Solution :

Tout d'abord, remarquons que $F \cap G = \{0_E\}$. En effet, soit $f \in F \cap G$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0.$$

Ainsi : $F \cap G \subset \{0_E\}$ et donc $F \cap G = \{0_E\}$. D'autre part, soit $f \in E$. Alors, en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \\ i(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned}$$

on vérifie facilement que :

- $f = p + i$;
- $p \in F$ et $i \in G$.

Ainsi, on a bien : $E = F + G$. Conclusion : $E = F \oplus G$.

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2 \quad \text{et} \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Soit (x, y, z) un vecteur de E. Calculer $u(x, y, z)$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$.
4. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Solution :

1. Soit $(x, y, z) \in E$. On a : $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et donc par linéarité de u, on obtient :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = u(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3) \\ &= x(-2e_1 + 2e_3) + 3ye_2 + z(-4e_1 + 4e_3) \\ &= (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z). \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} u &= \{(x,y,z) \in E \mid u(x,y,z) = 0_E\} \\
&= \{(x,y,z) \in E \mid -2x - 4z = 0, 3y = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4z = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in E \mid x = -2z \quad \text{et} \quad y = 0\} \\
&= \{(-2z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{Vect}\Big(\overbrace{(-2,0,1)}^{w}\Big).
\end{aligned}$$

Donc la famille (w) engendre $\operatorname{Ker} u$. De plus, comme $w \neq 0_E$, alors la famille (w) est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker} u$.
Remarque : $\operatorname{Ker} u$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif. Par ailleurs, comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimenion finie $E = \mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif.

3. On a $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\Big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\Big)$. Ainsi, la famille $\mathcal{G} = \Big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\Big)$ engendre $\operatorname{Im} u$. Or, d'après le théorème du rang, on sait que $\dim \operatorname{Im} u = 3 - 1 = 2$. Du coup, il suffit d'extraire de $\mathcal{G}$ une famille libre à deux éléments. On vérifie immédiatement que $\Big(u(e_1), u(e_2)\Big)$ est une telle famille. C'est donc une base de $\operatorname{Im} u$.

4. Par le théorème de la base adaptée, il suffit de montrer que la famille obtenue par concaténation d'une base de $\operatorname{Ker} u$ et d'une base de $\operatorname{Im} u$ constitue une base de E. Soit alors $\mathcal{B} = \Big((-2,0,1), (-2,0,2), (0,3,0)\Big)$ une telle famille. On vérifie facilement que c'est une famille libre et donc une base de E. D'où : $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 11
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit u l'application de E dans E définie par :

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
4. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Solution :

1. Remarquons d'abord que si $P \in E$, $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc u envoie bien E dans E. Montrons ensuite que u est linéaire. Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
u(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q) + (1 - X)(\lambda P + Q)' \\
&= \lambda P + Q + (1 - X)(\lambda P' + Q') \\
&= \lambda\Big(P + (1 - X)P'\Big) + \Big(Q + (1 - X)Q'\Big) \\
&= \lambda u(P) + u(Q).
\end{aligned}$$

u est donc bien linéaire.

2. Puisque $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E, alors on sait que :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\Big(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)\Big).$$

Comme : $u(1) = 1,\ u(X) = 1,\ u(X^2) = -X^2 + 2X,\ u(X^3) = -2X^3 + 3X^2$, alors :

$$\mathrm{Vect}\Big(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)\Big) = \mathrm{Vect}\Big(u(1), u(X^2), u(X^3)\Big),$$

c-à-d que $\Big(u(1), u(X^2), u(X^3)\Big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. De plus, c'est une famille qui est échelonnée en degré et donc c'est une famille libre.
Ceci montre que $\Big(u(1), u(X^2), u(X^3)\Big)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

3. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$. On a :

$$u(P) = -2aX^3 + (3a - b)X^2 + 2bX + c + d.$$

Ainsi :

$$u(P) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2a & = & 0 \\ 3a - b & = & 0 \\ 2b & = & 0 \\ c + d & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & c \\ d & = & -c \end{array}\right.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(u) &= \{P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E \mid u(P) = 0_E\} \\ &= \{c(X-1) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(X-1). \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(X-1)$ engendre $\mathrm{Ker}(u)$. On en déduit donc que $(X-1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

4. La concaténation des bases de $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ trouvées précédemment est $(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2, X - 1)$. Ces polynômes sont tous de degrés différents. Ils forment donc une base de E. Ceci montre que : $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

Exercice 12
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et u et v deux applications linéaires de E dans F. Montrer que : $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

Solution :
Par définition, on a : $\operatorname{rg}(u + v) = \dim \mathrm{Im}(u + v)$. Or :

$$\mathrm{Im}(u + v) = \{u(x) + v(x), x \in E\} \subset \{u(x) + v(x'), (x, x') \in E^2\} = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u + v) &\leq \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v) \\ &= \dim(\mathrm{Im}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, v) - \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v) \quad \text{(formule de Grassmann)} \\ &\leq \dim(\mathrm{Im}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, v) \\ &= \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v. \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E,F) : \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

D'autre part, puisque $\operatorname{Im}(-v) = \operatorname{Im} v$, on a :

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u+v-v) \leq \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg} v,$$

et donc $\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v \leq \operatorname{rg}(u+v)$. En échangeant les rôles de u et v, on a aussi : $\operatorname{rg} v - \operatorname{rg} u \leq \operatorname{rg}(u+v)$ et finalement :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E,F) : |\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u+v).$$

On conclut que :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E,F) : |\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

Exercice 13

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant : $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg} f$.

1. Établir que : $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que les espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

Solution :

1. Tout d'abord, on va montrer que $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$ et on conclut en transformant ces inclusions en égalités par un argument de dimension.
   — Soit $y \in \operatorname{Im}(f^2)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$. Ainsi : $y = f\big(f(x)\big) = f(a)$ avec $a = f(x) \in E$ et par suite $y \in \operatorname{Im} f$. D'où l'inclusion $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im} f$. De plus, l'hypothèse $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg} f$ fournit l'égalité des dimensions et donc : $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im} f$.
   — Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors : $f(x) = 0_E$ et donc : $f^2(x) = f(0_E) = 0_E$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$ et on obtient l'inclusion : $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$. De plus, la formule du rang appliquée à f et f^2 donne :

   $$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f \quad \text{et}$$
   $$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f^2) + \operatorname{rg}(f^2).$$

   Comme $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg} f$, on en déduit que : $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker}(f^2)$. On conclut que : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f^2)$.
2. Il suffit de vérifier que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe et conclure avec un argument de dimension. Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Comme $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0_E$. De plus, on a $x \in \operatorname{Im} f$ et il existe donc $a \in E$ tel que $x = f(a)$. On a alors : $f\big(f(a)\big) = f(x) = 0_E$ et donc $a \in \operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker} f$. Donc : $x = f(a) = 0_E$. Ainsi, les espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe. De plus, la formule du rang donne :

   $$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

   Ce qui permet de conclure que les espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 14

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \Big(f^2 = 0 \quad \text{et} \quad \dim E = 2 \operatorname{rg} f\Big).$$

Solution :
On raisonne par double implication.
($\Rightarrow$) Supposons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ et par conséquent : $f\Big(f(x)\Big) = 0_E$. Ainsi $f^2 = 0$. D'autre part, la formule du rang nous donne :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = 2 \operatorname{rg} f.$$

($\Leftarrow$) Supposons $f^2 = 0$ et $\dim E = 2 \operatorname{rg} f$. D'une part, on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. En effet, soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc $f(y) = f\Big(f(x)\Big) = 0_E$. D'où $y \in \operatorname{Ker} f$. D'autre part, la formule du rang nous donne : $2 \operatorname{rg} f = \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$ et donc : $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f$. Par inculsion et égalité des dimensions, on peut conclure que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

Exercice 15
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel qu'il existe $n \geq 1$ verifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\Big(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\Big)$ soit libre.

Solution :
Puisque $f^{n-1} \neq 0$, alors il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrons que la famille

$$\Big(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\Big)$$

est libre. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que la famille $\Big(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\Big)$ n'est pas libre. Ainsi, ils existent $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0 \quad (\blacklozenge).$$

Soit $p = \min\{0 \leq k \leq n-1 \mid \lambda_k \neq 0\}$. En composant $\blacklozenge$ par f^{n-1-p}, on obtient :

$$f^{n-1-p}\Big(\lambda_p f^p(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)\Big) = \lambda_p f^{n-1}(x) = 0, \quad \text{car} \quad f^j = 0, \forall j \geq n.$$

Comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, on en déduit alors que : $\lambda_p = 0$. Contradiction.
D'où, la famille $\Big(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\Big)$ est libre.

Exercice 16
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Montrer que G et $\operatorname{Im} f$ sont isomorphes.

Solution :
On définit l'application :

$$\begin{aligned} g = f_{|G} : \quad G &\longrightarrow \operatorname{Im} f \\ x &\longmapsto g(x) = f(x). \end{aligned}$$

Alors :
- g est linéaire de G dans $\operatorname{Im} f$. c'est une conséquence directe du fait que f est linéaire.
- g est injective. En effet, on a

$$\operatorname{Ker} g = \{x \in G \mid g(x) = f(x) = 0_F\} = G \cap \operatorname{Ker} f.$$

  Comme G et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe, on a : $G \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. D'où $\operatorname{Ker} g = \{0_E\}$ et g est injective.

— g est surjective. En effet, soit $y \in \operatorname{Im} f$, disons : $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Comme $E = G + \operatorname{Ker} f$, alors : $x = u + v$ pour certains $u \in G$ et $v \in \operatorname{Ker} f$, donc : $y = f(x) = f(u) + f(v) = f(u) + 0_F = f(u) = g(u)$ avec $u \in G$, ce qui prouve bien que g est surjective.

Ainsi, g définit un isomorphisme de G sur $\operatorname{Im} f$.

Examen d'Algèbre 1 : Corrigé (partiel)
Session normale
Durée : 1h 15 min

N.B : Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie.

Exercice 1 : (5 points)

Soit G un groupe multiplicatif et $f \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}\right.$ une application.
Montrer que f est un morphisme de groupes si et seulement si G est abélien.

Solution :
$(\Rightarrow)$ Supposons que f est un morphisme de groupes. Pour tous $x, y \in G$, on a

$$xy = f(x^{-1})f(y^{-1}) = f(x^{-1}y^{-1}) = (x^{-1}y^{-1})^{-1} = yx$$

et G est abélien.
$(\Leftarrow)$ Réciproquement, supposons que G est abélien. Soit $x, y \in G$. On a

$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$

et donc f est un morphisme de groupes.

Exercice 2 : (5 points)

1. Déterminer la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ du polynôme
$$P = X^7 - 1.$$
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

Solution :

1. Cherchons les racines de P dans $\mathbb{C}$, c-à-d les nombres complexes z tels que $z^7 - 1 = 0$. On a :
$$\begin{aligned} z^7 - 1 = 0 &\Leftrightarrow z^7 = 1 \\ &\Leftrightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{7}}, \quad k \in \{0, \cdots, 6\}. \end{aligned}$$

D'où, dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = \prod_{k=0}^{6} (X - e^{i\frac{2k\pi}{7}}).$$

Or $e^{i\frac{2\pi}{7}}$ et $e^{i\frac{12\pi}{7}}$ sont conjugués, $e^{i\frac{4\pi}{7}}$ et $e^{i\frac{10\pi}{7}}$ sont conjugués ainsi que $e^{i\frac{6\pi}{7}}$ et $e^{i\frac{8\pi}{7}}$. Donc, par regroupement des racines non réelles du polynôme P par paires de conjugués, dans $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$\begin{aligned} P &= (X-1)(X - e^{i\frac{2\pi}{7}})(X - e^{i\frac{12\pi}{7}})(X - e^{i\frac{4\pi}{7}})(X - e^{i\frac{10\pi}{7}})(X - e^{i\frac{6\pi}{7}})(X - e^{i\frac{8\pi}{7}}) \\ &= (X-1)(X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{7})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{7})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{6\pi}{7})X + 1). \end{aligned}$$

2. Soit $F = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
   — **Recherche de la partie entière** : Comme $\deg F < 0$, alors la partie entière est nulle.
   — **Forme de la décomposition en éléments simple dans** $\mathbb{R}(X)$: La décomposition cherchée s'écrit :
   $$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2} \quad (\bigstar)$$
   où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.
   — **Calcul de** a : On multiplie $\bigstar$ par X puis on évalue en 0, pour obtenir : $a = \frac{1}{2}$.
   — **Calcul de** b : On multiplie $\bigstar$ par $X+1$ puis on évalue en -1, pour obtenir : $b = -1$.
   — **Calcul de** c : On multiplie $\bigstar$ par $X+2$ puis on évalue en -2, pour obtenir : $c = \frac{1}{2}$.
   — **Conclusion** : Dans $\mathbb{R}(X)$, on a :
   $$F = \frac{\frac{1}{2}}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{\frac{1}{2}}{X+2}.$$

Exercice 3 : (10 points)
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2 \quad \text{et} \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Soit (x, y, z) un vecteur de E. Montrer que $u(x, y, z) = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z)$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
3. En déduire le rang de u.
4. Étudier l'injectivité et la surjectivité de u.
5. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$.
6. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Solution :

1. Soit $(x, y, z) \in E$. On a : $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et donc par linéarité de u, on obtient :
$$\begin{aligned} u(x, y, z) = u(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3) \\ &= x(-2e_1 + 2e_3) + 3ye_2 + z(-4e_1 + 4e_3) \\ &= (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z). \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} u &= \{(x,y,z) \in E \mid u(x,y,z) = 0_E\} \\
&= \{(x,y,z) \in E \mid -2x - 4z = 0, 3y = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4z = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in E \mid x = -2z \quad \text{et} \quad y = 0\} \\
&= \{(-2z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{Vect}\Big(\overbrace{(-2,0,1)}^{w}\Big).
\end{aligned}$$

   Donc la famille (w) engendre $\operatorname{Ker} u$. De plus, comme $w \neq 0_E$, alors la famille (w) est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker} u$.

3. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg} u.$$

   Or, d'après la question précédente, on sait que $\dim \ker u = 1$ et donc : $\operatorname{rg} u = 3 - 1 = 2$.

4. Comme $\operatorname{Ker} u$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ alors l'endomorphisme u n'est pas injectif. Par ailleurs, comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimenion finie $E = \mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif.

5. On a $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\Big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\Big)$. De plus, on remarque que $u(e_3) = 2u(e_1)$. Du coup, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\Big(u(e_1), u(e_2)\Big)$. Ainsi la famille $\mathcal{C} := \Big(u(e_1), u(e_2)\Big)$ engendre $\operatorname{Im} u$ et de plus on a $\operatorname{Card} \mathcal{C} = 2 = \dim \operatorname{Im} u$. C'est donc une base de $\operatorname{Im} u$.

6. Par le théorème de la base adaptée, il suffit de montrer que la famille obtenue par concaténation d'une base de $\operatorname{Ker} u$ et d'une base de $\operatorname{Im} u$ constitue une base de E. Soit alors $\mathcal{B}' = \Big((-2,0,1), (-2,0,2), (0,3,0)\Big)$ une telle famille. On vérifie facilement que c'est une famille libre et donc une base de E. D'où : $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques - Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2020/2021
Filière MIP (S1), Module M112
Responsable : PROF. JAWAD SALHI

Examen d'Algèbre 1 : Corrigé (partiel)
Session de rattrapage
Durée : 1h

N.B : Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie.

Exercice 1 : (6 points)
Soit G un groupe noté multiplicativement. Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par : $\tau_a(x) = axa^{-1}$.

1. Montrer que τ_a est un morphisme du groupe G vers lui même.
2. Vérifier que $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$ pour tous a et b dans G.
3. Montrer que τ_a est bijective et exprimer son application réciproque.

Solution :

1. Soit $x, y \in G$. On a par associativité :
$$\tau_a(x)\tau_a(y) = (axa^{-1})(aya^{-1}) = ax(a^{-1}a)ya^{-1} = axya^{-1} = \tau_a(xy).$$
L'application τ_a est donc un morphisme du groupe G vers lui-même.
2. On vérifie l'égalité de deux applications en constatant celle-ci en tout point. Pour tout $x \in G$, on a :
$$(\tau_a \circ \tau_b)(x) = \tau_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = \tau_{ab}(x).$$
On a donc : $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.
3. On peut montrer que τ_a est bijective en étudiant injectivité et surjectivité, ou en résolvant l'équation $\tau_a(x) = y$ d'inconnue x. Ici, il est plus à propos de proposer un candidat pour l'application réciproque de τ_a. Pour cela, il suffit de remarquer que :
$$(\tau_a \circ \tau_{a^{-1}}) = \tau_1 = Id_G \quad \text{et} \quad (\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a) = \tau_1 = Id_G.$$
On en déduit que τ_a est bijective et $(\tau_a)^{-1} = \tau_{a^{-1}}$.

Exercice 2 : (6 points)

1. Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :
$$P = (X^2 - X + 1)^2 + 1.$$
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

3. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Solution :

1. On a : $P = (\underbrace{X^2 - X + 1 + i}_{\text{noté } Q})(\underbrace{X^2 - X + 1 - i}_{\text{noté } R})$. Le discriminant Δ de Q est :

$$\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i = (1-2i)^2.$$

Donc les zéros de Q dans $\mathbb{C}$ sont :

$$\frac{1 + (1-2i)}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad \frac{1-(1-2i)}{2} = i.$$

D'où : $Q = (X-(1-i))(X-i)$. De même (ou par conjugaison) : $R = (X-(1+i))(X+i)$. D'où :

$$\begin{aligned} P &= (X-1+i)(X-i)(X-1-i)(X+i) \\ &= (X-1+i)(X-1-i)(X-i)(X+i) \\ &= \Big((X-1)^2+1\Big)(X^2+1) = (X^2-2X+2)(X^2+1) \end{aligned}$$

et les deux trinômes obtenus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $F = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
   — **Recherche de la partie entière** : Comme $\deg F < 0$, alors la partie entière est nulle.
   — **Forme de la décomposition en éléments simple dans** $\mathbb{R}(X)$: La décomposition cherchée s'écrit :
   $$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2} \qquad (\bigstar)$$
   où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.
   — **Calcul de** a : On multiplie $\bigstar$ par X puis on évalue en 0, pour obtenir : $a = \frac{1}{2}$.
   — **Calcul de** b : On multiplie $\bigstar$ par $X+1$ puis on évalue en -1, pour obtenir : $b = -1$.
   — **Calcul de** c : On multiplie $\bigstar$ par $X+2$ puis on évalue en -2, pour obtenir : $c = \frac{1}{2}$.
   — **Conclusion** : Dans $\mathbb{R}(X)$, on a :

$$F = \frac{\frac{1}{2}}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{\frac{1}{2}}{X+2}.$$

3. En utilisant la décomposition en éléments simples précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1/2}{k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que $(S_n)_n$ converge vers $\frac{1}{4}$.

Exercice 3 : (8 points)
Soit $E=\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(x,y,z)=(3z,-x+y+3z,z).$$

1. Montrer que $f\circ f=f$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.
3. Vérifier que $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=\{0_E\}$.
4. En déduire que $E=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$.

Solution :

1. Soit $(x,y,z)\in E$. On a :

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x,y,z)&=f\Big(f(x,y,z)\Big)\\&=f(3z,-x+y+3z,z)\\&=\Big(3z,-3z+(-x+y+3z)+3z,z\Big)\\&=(3z,-x+y+3z,z)=f(x,y,z).\end{aligned}$$

   Ainsi : $\forall(x,y,z)\in E:\quad (f\circ f)(x,y,z)=f(x,y,z)$. D'où $f\circ f=f$. (On dit que f est un projecteur).
2. On résout $f(x,y,z)=(0,0,0)$ et on trouve $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}((1,1,0))$. Ainsi $\mathcal{B}_1:=\Big((1,1,0)\Big)$ engendre $\operatorname{Ker}(f)$. Comme $(1,1,0)\neq 0_E$, alors $\mathcal{B}_1$ est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$. De plus, $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}\left(f\left(e_1\right),f\left(e_2\right),f\left(e_3\right)\right)=\operatorname{Vect}((0,1,0),(3,3,1))$. Ainsi $\mathcal{B}_2:=\Big((0,1,0),(3,3,1)\Big)$ engendre $\operatorname{Im}(f)$. Comme $(0,1,0)$ et $(3,3,1)$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{B}_2$ est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(f)$.
3. Soit $u\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f$. Alors $f(u)=0_E$ et il existe $v\in E$ tel que $u=f(v)$. Ainsi, $f(u)=0_E=f(f(v))=f^2(v)\underset{f\text{ proj.}}{=}f(v)=u$ donc u est bien nul.
4. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im} f=\{0_E\}\quad\text{et}\\&\dim(E)=\dim(\operatorname{Ker} f)+\dim(\operatorname{Im} f).\end{aligned}$$

   D'où le résultat d'après la caractérisation de la supplémentarité en dimension finie.