Calcul différentiel
Corrections de la série 3

Aziz ELBOUR

Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia

2021-2022

Plan

Exercice 1

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application de classe C^2 telle que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$,
$f(tx) = t^2 f(x)$.
Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $Df(0)(x) = 0$ et
$D^2 f(0) \cdot (x, x) = 2f(x)$.

Réponse

- ***Montrons que pour tout*** $x \in E$, $Df(0)(x) = 0$.
Puisque f est différentiable en 0, alors pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} Df(0)(x) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(0 + tx) - f(0)}{t} = \left.\frac{d}{dt} f(tx)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt} t^2 f(x)\right|_{t=0} = \left. 2t\, f(x)\right|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Exercice 1

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application de classe C^2 telle que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $f(tx) = t^2 f(x)$.
Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $Df(0)(x) = 0$ et $D^2 f(0) \cdot (x, x) = 2f(x)$.

Réponse

- ***Montrons que pour tout*** $x \in E$, $Df(0)(x) = 0$.
Puisque f est différentiable en 0, *alors pour tout $x \in E$, on a*

$$
\begin{aligned}
Df(0)(x) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(0+tx) - f(0)}{t} = \frac{d}{dt} f(tx)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} t^2 f(x)\Big|_{t=0} = 2t\, f(x)\big|_{t=0} = 0.
\end{aligned}
$$

Réponse

Autre méthode : *Par hypothèse on a* $f(tx) = t^2 f(x)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.
En prenant $t = 0$, *on obtient* $f(0) = 0$.
Et comme f *est différentiable en* 0, *alors*

$$\begin{aligned} Df(0)(x) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(0 + tx) - f(0)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(tx)}{t} \\ &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{t^2\ f(x)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} t\ f(x) = 0. \end{aligned}$$

- ***Montrons que pour tout*** $x \in E$, $D^2 f(0) \cdot (x, x) = 2f(x)$.
Puisque f *est deux fois différentiable en* 0, *alors pour tout* $x \in E$, *on a*

$$D^2 f(0) \cdot (x, x) = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f(tx + sx)\Big|_{t=s=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds} f(tx + sx)\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0}$$

Réponse

Autre méthode : *Par hypothèse on a* $f(tx) = t^2 f(x)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.
En prenant $t = 0$, *on obtient* $f(0) = 0$.
Et comme f *est différentiable en* 0, *alors*

$$
\begin{aligned}
Df(0)(x) &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(0+tx) - f(0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(tx)}{t} \\
&= \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{t^2\, f(x)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} t\, f(x) = 0.
\end{aligned}
$$

- ***Montrons que pour tout*** $x \in E$, $D^2 f(0)\cdot(x,x) = 2f(x)$.

Puisque f *est deux fois différentiable en* 0, *alors pour tout* $x \in E$, *on a*

$$
D^2 f(0)\cdot(x,x) = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f(tx+sx)\Big|_{t=s=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds} f(tx+sx)\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0}
$$

Réponse

Autre méthode : *Par hypothèse on a* $f(tx) = t^2 f(x)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.
En prenant $t = 0$, *on obtient* $f(0) = 0$.
Et comme f *est différentiable en* 0, *alors*

$$\begin{aligned} Df(0)(x) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(0+tx) - f(0)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(tx)}{t} \\ &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{t^2 \, f(x)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} t \, f(x) = 0. \end{aligned}$$

\- ***Montrons que pour tout*** $x \in E$, $D^2 f(0) \cdot (x, x) = 2f(x)$.
Puisque f *est deux fois différentiable en* 0, *alors pour tout* $x \in E$, *on a*

$$D^2 f(0) \cdot (x, x) = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \, f(tx + sx) \Big|_{t=s=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{ds} \, f(tx + sx) \Big|_{s=0} \right) \Big|_{t=0}$$

Réponse

Or, d'après l'hypothèse, on a

$$f(tx+sx) = f((t+s)x) = (t+s)^2 \ f(x) = \left(t^2+2ts+s^2\right) \ f(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} D^2 f(0)\cdot(x,x) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}\left(t^2+2ts+s^2\right) \ f(x)\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} 2t \ f(x)\Big|_{t=0} \\ &= 2f(x). \end{aligned}$$

Réponse

Or, d'après l'hypothèse, on a

$$f(tx+sx) = f((t+s)x) = (t+s)^2 \ f(x) = \left(t^2+2ts+s^2\right) \ f(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} D^2 f(0)\cdot(x,x) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}\left(t^2+2ts+s^2\right) \ f(x)\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}2t \ f(x)\Big|_{t=0} \\ &= 2f(x). \end{aligned}$$

Plan

Exercice 2

Soit U un ***ouvert convexe*** *d'un espace vectoriel normé réel E et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est* ***convexe*** *sur U si, pour tout $(x, y) \in U^2$ et tout $t \in [0, 1]$,*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

1) *On suppose f différentiable sur U. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

   i) *f est convexe sur U ;*
   ii) $\forall (x, y) \in U^2, \quad Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x);$
   iii) $\forall (x, y) \in U^2, \quad Df(x)(y-x) \leq Df(y)(y-x).$

2) *Si $E = \mathbb{R}$, montrer qu'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si sa dérivée f' est une fonction croissante sur U.*

3) On suppose que f est deux fois différentiable dans U. Montrer que f est convexe sur U si et seulement si,

$$\forall x \in U,\ \forall h \in E, \quad D^2 f(x)(h,h) \geq 0.$$

4) On suppose f convexe et différentiable sur U. Soit $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$. Montrer que f a un minimum absolu en a.

Réponse

1) On suppose f différentiable sur U. ***Montrons que*** *$i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii)$.*
Nous allons montrer que $i) \Leftrightarrow ii)$ et que $ii) \Leftrightarrow iii)$.
- ***Montrons d'abord l'équivalence*** *$i) \Leftrightarrow ii)$.*

3) On suppose que f est deux fois différentiable dans U. Montrer que f est convexe sur U si et seulement si,

$$\forall x \in U,\ \forall h \in E, \quad D^2 f(x)(h,h) \geq 0.$$

4) On suppose f convexe et différentiable sur U. Soit $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$. Montrer que f a un minimum absolu en a.

Réponse

1) On suppose f différentiable sur U. ***Montrons que*** *$i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii)$.*
Nous allons montrer que $i) \Leftrightarrow ii)$ et que $ii) \Leftrightarrow iii)$.
- ***Montrons d'abord l'équivalence*** *$i) \Leftrightarrow ii)$.*

Réponse

$i) \Rightarrow ii)$. Supposons f convexe sur U et montrons $ii)$.

Soit $(x, y) \in U^2$. Par convexité de f on a

$$\forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + tf(y)$$

c'est-à-dire,

$$\forall t \in [0,1], \quad f(x + t(y-x)) \leq f(x) + t[f(y) - f(x)].$$

Donc

$$\forall t \in]0,1], \quad \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

En faisant tendre t vers 0^+ et en utilisant la relation

$$Df(x)(y-x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t},$$

Réponse

i) ⇒ ii). Supposons f convexe sur U et montrons ii).
Soit $(x, y) \in U^2$. Par convexité de f on a

$$\forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y)$$

c'est-à-dire,

$$\forall t \in [0,1], \quad f(x + t(y-x)) \leq f(x) + t[f(y) - f(x)].$$

Donc

$$\forall t \in]0,1], \quad \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

En faisant tendre t vers 0^+ et en utilisant la relation

$$Df(x)(y-x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t},$$

Réponse

$i) \Rightarrow ii)$. Supposons f convexe sur U et montrons $ii)$.
Soit $(x, y) \in U^2$. Par convexité de f on a

$$\forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

c'est-à-dire,

$$\forall t \in [0,1], \quad f(x + t(y-x)) \leq f(x) + t[f(y) - f(x)].$$

Donc

$$\forall t \in]0,1], \quad \frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

En faisant tendre t vers 0^+ et en utilisant la relation

$$Df(x)(y-x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t},$$

Réponse

i) $\Rightarrow$ ii). Supposons f convexe sur U et montrons ii).
Soit $(x, y) \in U^2$. Par convexité de f on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

c'est-à-dire,

$$\forall t \in [0, 1], \quad f(x + t(y - x)) \leq f(x) + t[f(y) - f(x)].$$

Donc

$$\forall t \in]0, 1], \quad \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

En faisant tendre t vers 0^+ et en utilisant la relation

$$Df(x)(y - x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t},$$

Réponse

i) $\Rightarrow$ *ii). Supposons f convexe sur U et montrons ii).*
Soit $(x, y) \in U^2$. *Par convexité de f on a*

$$\forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + tf(y)$$

c'est-à-dire,

$$\forall t \in [0, 1], \quad f(x + t(y-x)) \leq f(x) + t[f(y) - f(x)].$$

Donc

$$\forall t \in]0, 1], \quad \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

En faisant tendre t vers 0^+ *et en utilisant la relation*

$$Df(x)(y-x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t},$$

Réponse

on obtient :

$$Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x).$$

D'où ii).

ii) $\Rightarrow$ i). Soient $(x, y) \in U^2$ et $t \in [0, 1]$. Posons $z = (1-t)x + ty$; c'est un élément de U (car U convexe).
En appliquant ii) aux couples (z, x) et (z, y), on obtient :

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} Df(z)(x-z) \leq f(x) - f(z) \\ Df(z)(y-z) \leq f(y) - f(z) \end{array} \right.$$

En multipliant les membres de l'inégalité (1) par $(1-t)$, et les membres de l'inégalité (2) par t,

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-t)\,Df(z)(x-z) \leq (1-t)\,f(x) - (1-t)\,f(z) \\ tDf(z)(y-z) \leq tf(y) - tf(z) \end{array} \right.$$

puis en additionnant les inégalités ci-dessus, on obtient :

Réponse

on obtient :

$$Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x).$$

D'où ii).

ii) $\Rightarrow$ *i). Soient* $(x, y) \in U^2$ *et* $t \in [0, 1]$. *Posons* $z = (1-t)x + ty$ *; c'est un élément de U (car U convexe).*

En appliquant ii) aux couples (z, x) *et* (z, y)*, on obtient :*

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} Df(z)(x-z) \leq f(x) - f(z) \\ Df(z)(y-z) \leq f(y) - f(z) \end{cases}$$

En multipliant les membres de l'inégalité (1) par $(1-t)$*, et les membres de l'inégalité (2) par t,*

$$\begin{cases} (1-t)\,Df(z)(x-z) \leq (1-t)\,f(x) - (1-t)\,f(z) \\ tDf(z)(y-z) \leq tf(y) - tf(z) \end{cases}$$

puis en additionnant les inégalités ci-dessus, on obtient :

Réponse

on obtient :

$$Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x).$$

D'où ii).

ii) $\Rightarrow$ *i). Soient* $(x, y) \in U^2$ *et* $t \in [0,1]$. *Posons* $z = (1-t)x + ty$ *;*
c'est un élément de U (car U convexe).
En appliquant ii) aux couples (z, x) *et* (z, y)*, on obtient :*

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} Df(z)(x-z) \leq f(x) - f(z) \\ Df(z)(y-z) \leq f(y) - f(z) \end{array} \right.$$

En multipliant les membres de l'inégalité (1) par $(1-t)$*, et les membres de l'inégalité (2) par* t*,*

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-t)\,Df(z)(x-z) \leq (1-t)\,f(x) - (1-t)\,f(z) \\ tDf(z)(y-z) \leq tf(y) - tf(z) \end{array} \right.$$

puis en additionnant les inégalités ci-dessus, on obtient :

Réponse

on obtient :

$$Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x).$$

D'où ii).
ii) $\Rightarrow$ *i). Soient* $(x, y) \in U^2$ *et* $t \in [0, 1]$. *Posons* $z = (1-t)x + ty$ *; c'est un élément de U (car U convexe).*
En appliquant ii) aux couples (z, x) *et* (z, y)*, on obtient :*

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} Df(z)(x-z) \leq f(x) - f(z) \\ Df(z)(y-z) \leq f(y) - f(z) \end{cases}$$

En multipliant les membres de l'inégalité (1) par $(1-t)$*, et les membres de l'inégalité (2) par* t*,*

$$\begin{cases} (1-t)\,Df(z)(x-z) \leq (1-t)\,f(x) - (1-t)\,f(z) \\ tDf(z)(y-z) \leq tf(y) - tf(z) \end{cases}$$

puis en additionnant les inégalités ci-dessus, on obtient :

Réponse

on obtient :

$$Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x).$$

D'où ii).
ii) $\Rightarrow$ *i). Soient* $(x, y) \in U^2$ *et* $t \in [0, 1]$. *Posons* $z = (1-t)x + ty$ *;*
c'est un élément de U (car U convexe).
En appliquant ii) aux couples (z, x) *et* (z, y)*, on obtient :*

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} Df(z)(x-z) \leq f(x) - f(z) \\ Df(z)(y-z) \leq f(y) - f(z) \end{array} \right.$$

En multipliant les membres de l'inégalité (1) par $(1-t)$*, et les membres de l'inégalité (2) par* t*,*

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-t)\,Df(z)(x-z) \leq (1-t)\,f(x) - (1-t)\,f(z) \\ tDf(z)(y-z) \leq tf(y) - tf(z) \end{array} \right.$$

puis en additionnant les inégalités ci-dessus, on obtient :

Réponse

$$(1-t)\,Df(z)(x-z)+t\,Df(z)(y-z)\leq(1-t)\,f(x)+t\,f(y)-f(z)$$

D'où en utilisant le fait que $Df(z)$ est linéaire,

$$Df(z)\left([(1-t)\,x+ty]-z\right)\leq(1-t)\,f(x)+t\,f(y)-f(z)\,.$$

Or $\quad Df(z)\left([(1-t)\,x+ty]-z\right)=Df(z)\,(z-z)=Df(z)\,(0)=0.$

Donc

$$0\leq(1-t)\,f(x)+tf(y)-f(z)$$

c'est-à-dire,

$$f\left((1-t)\,x+ty\right)\leq(1-t)\,f(x)+tf(y)\,.$$

Ce qui signifie bien que f est convexe. D'où i).

Réponse

$$(1-t)\,Df(z)(x-z)+t\;Df(z)(y-z)\leq(1-t)\,f\,(x)+t\;f\,(y)-f\,(z)$$

D'où en utilisant le fait que $Df(z)$ est linéaire,

$$Df\,(z)\,([(1-t)\,x+ty]-z)\leq(1-t)\,f\,(x)+t\;f\,(y)-f\,(z)\,.$$

Or $\quad Df\,(z)\,([(1-t)\,x+ty]-z)=Df\,(z)\,(z-z)=Df\,(z)\,(0)=0.$
Donc

$$0\leq(1-t)\,f\,(x)+tf\,(y)-f\,(z)$$

c'est-à-dire,

$$f\,((1-t)\,x+ty)\leq(1-t)\,f\,(x)+tf\,(y)\,.$$

Ce qui signifie bien que f est convexe. D'où i).

Réponse

- ***Montrons maintenant l'équivalence*** *ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*).

ii) $\Rightarrow$ *iii*). *Supposons ii*) *vérifie et montrons iii*). *Soit* $(x, y) \in U^2$. *En appliquant ii*) *aux couples* (x, y) *et* (y, x), *on obtient :*

$$\begin{cases} Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \\ Df(y)(x-y) \leq f(x) - f(y) \end{cases}$$

puis en additionnant les inégalités ci-dessus, on obtient :

$$Df(x)(y-x) + Df(y)(x-y) \leq 0$$

Donc en utilisant le fait que $Df(y)$ *est linéaire,*

$$Df(x)(y-x) \leq -Df(y)(x-y) = Df(y)(y-x).$$

D'où iii).

Réponse

- ***Montrons maintenant l'équivalence*** *ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*).
ii) $\Rightarrow$ *iii*). *Supposons ii*) *vérifie et montrons iii*). *Soit* $(x, y) \in U^2$. *En appliquant ii*) *aux couples* (x, y) *et* (y, x), *on obtient :*

$$\begin{cases} Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \\ Df(y)(x-y) \leq f(x) - f(y) \end{cases}$$

puis en additionnant les inégalités ci-dessus, on obtient :

$$Df(x)(y-x) + Df(y)(x-y) \leq 0$$

Donc en utilisant le fait que $Df(y)$ *est linéaire,*

$$Df(x)(y-x) \leq -Df(y)(x-y) = Df(y)(y-x).$$

D'où iii).

Réponse

- ***Montrons maintenant l'équivalence*** *ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*).
ii) $\Rightarrow$ *iii*). *Supposons ii*) *vérifie et montrons iii*). *Soit* $(x, y) \in U^2$. *En appliquant ii*) *aux couples* (x, y) *et* (y, x), *on obtient :*

$$\begin{cases} Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \\ Df(y)(x-y) \leq f(x) - f(y) \end{cases}$$

puis en additionnant les inégalités ci-dessus, on obtient :

$$Df(x)(y-x) + Df(y)(x-y) \leq 0$$

Donc en utilisant le fait que $Df(y)$ *est linéaire,*

$$Df(x)(y-x) \leq -Df(y)(x-y) = Df(y)(y-x).$$

D'où iii).

Réponse

- ***Montrons maintenant l'équivalence*** *ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*).
ii) $\Rightarrow$ *iii*). *Supposons ii*) *vérifie et montrons iii*). *Soit* $(x, y) \in U^2$. *En appliquant ii*) *aux couples* (x, y) *et* (y, x), *on obtient :*

$$\begin{cases} Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \\ Df(y)(x-y) \leq f(x) - f(y) \end{cases}$$

puis en additionnant les inégalités ci-dessus, on obtient :

$$Df(x)(y-x) + Df(y)(x-y) \leq 0$$

Donc en utilisant le fait que $Df(y)$ *est linéaire,*

$$Df(x)(y-x) \leq -Df(y)(x-y) = Df(y)(y-x).$$

D'où iii).

Réponse

iii) $\Rightarrow$ *ii*). *Supposons iii*) *vérifie et montrons ii*). *Soit* $(x, y) \in U^2$. *Considérons la fonction* $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(t) = f((1-t)x + ty) = f(x + t(y - x)), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Puisque f *est différentiable sur* U, *alors la fonction* g *est continue sur* $[0, 1]$ *et dérivable sur* $]0, 1[$, *et on a*

$$g'(t) = Df(x + t(y - x))(y - x), \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Donc d'après le T.A.F, il existe $c \in]0, 1[$ *tel que*

$$g(1) - g(0) = g'(c).$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{f(y) - f(x) = Df(x + c(y - x))(y - x).} \qquad (2.1)$$

Réponse

iii) $\Rightarrow$ *ii). Supposons iii) vérifie et montrons ii). Soit* $(x, y) \in U^2$*. Considérons la fonction* $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(t) = f((1-t)x + ty) = f(x + t(y-x)), \quad \forall t \in [0,1].$$

Puisque f *est différentiable sur* U*, alors la fonction* g *est continue sur* $[0,1]$ *et dérivable sur* $]0,1[$*, et on a*

$$g'(t) = Df(x + t(y-x))(y-x), \quad \forall t \in]0,1[.$$

Donc d'après le T.A.F, il existe $c \in]0,1[$ *tel que*

$$g(1) - g(0) = g'(c).$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{f(y) - f(x) = Df(x + c(y-x))(y-x).} \tag{2.1}$$

Réponse

iii) $\Rightarrow$ ii). Supposons iii) vérifie et montrons ii). Soit $(x, y) \in U^2$. *Considérons la fonction* $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(t) = f((1-t)x + ty) = f(x + t(y-x)), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Puisque f est différentiable sur U, alors la fonction g est continue sur $[0, 1]$ *et dérivable sur* $]0, 1[$, *et on a*

$$g'(t) = Df(x + t(y-x))(y-x), \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Donc d'après le T.A.F, il existe $c \in]0, 1[$ *tel que*

$$g(1) - g(0) = g'(c).$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{f(y) - f(x) = Df(x + c(y-x))(y-x).} \tag{2.1}$$

Réponse

iii) $\Rightarrow$ *ii*). *Supposons iii*) *vérifie et montrons ii*). *Soit* $(x, y) \in U^2$. *Considérons la fonction* $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(t) = f((1-t)x + ty) = f(x + t(y-x)), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Puisque f est différentiable sur U, alors la fonction g est continue sur $[0, 1]$ *et dérivable sur* $]0, 1[$*, et on a*

$$g'(t) = Df(x + t(y-x))(y-x), \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Donc d'après le T.A.F, il existe $c \in]0, 1[$ *tel que*

$$g(1) - g(0) = g'(c).$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{f(y) - f(x) = Df(x + c(y-x))(y-x).} \tag{2.1}$$

Réponse

Or d'après l'hypothèse iii) appliquée au couple $(x, x + c(y - x))$ *on a*

$$Df(x)(c(y-x)) \leq Df(x + c(y-x))(c(y-x)).$$

Donc en utilisant la linéarité de $Df(x)$ *et de* $Df(x + c(y - x))$*, on obtient après simplification par* $c > 0$ *:*

$$Df(x)(y-x) \leq Df(x + c(y-x))(y-x).$$

Par suite, en utilisant (2.1) :

$$Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x).$$

D'où ii). Par conséquent i) $\Leftrightarrow$ *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii).*

Réponse

Or d'après l'hypothèse iii) appliquée au couple $(x, x + c(y - x))$ *on a*

$$Df(x)(c(y-x)) \leq Df(x + c(y-x))(c(y-x)).$$

Donc en utilisant la linéarité de $Df(x)$ *et de* $Df(x + c(y-x))$*, on obtient après simplification par* $c > 0$ *:*

$$Df(x)(y-x) \leq Df(x + c(y-x))(y-x).$$

Par suite, en utilisant (2.1) :

$$Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x).$$

D'où ii). Par conséquent i) $\Leftrightarrow$ *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii).*

Réponse

Or d'après l'hypothèse iii) appliquée au couple $(x, x + c(y - x))$ *on a*

$$Df(x)(c(y-x)) \leq Df(x + c(y-x))(c(y-x)).$$

Donc en utilisant la linéarité de $Df(x)$ *et de* $Df(x + c(y-x))$*, on obtient après simplification par* $c > 0$ *:*

$$Df(x)(y-x) \leq Df(x + c(y-x))(y-x).$$

Par suite, en utilisant (2.1) :

$$Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x).$$

D'où ii). Par conséquent i) $\Leftrightarrow$ *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii).*

Réponse

Or d'après l'hypothèse iii) appliquée au couple $(x, x + c(y - x))$ *on a*

$$Df(x)(c(y - x)) \leq Df(x + c(y - x))(c(y - x)).$$

Donc en utilisant la linéarité de $Df(x)$ *et de* $Df(x + c(y - x))$*, on obtient après simplification par* $c > 0$ *:*

$$Df(x)(y - x) \leq Df(x + c(y - x))(y - x).$$

Par suite, en utilisant (2.1) :

$$Df(x)(y - x) \leq f(y) - f(x).$$

D'où ii). Par conséquent i) $\Leftrightarrow$ *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii).*

Réponse

2) Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}$. Alors f est différentiable sur U et on a

$$Df(x)(\lambda) = \lambda f'(x), \quad \forall x \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Montrons que f est convexe si et seulement si sa dérivée f' est une fonction croissante sur U.

($\Rightarrow$) Supposons f convexe et montrons que f' est croissante sur U. Soit $x, y \in U$ tel que $x < y$. D'après l'équivalence i) $\Leftrightarrow$ iii) de la question 1) on a

$$Df(x)(y-x) \leq Df(y)(y-x)$$

Donc

$$(y-x) f'(x) \leq (y-x) f'(y).$$

et comme $y - x > 0$, on en déduit que $f'(x) \leq f'(y)$. D'où f' est croissante sur U.

Réponse

($\Leftarrow$) *Réciproquement, supposons f' croissante sur U et montrons que f est convexe sur U. D'après l'équivalence $i) \Leftrightarrow iii)$ de la question 1), il suffit de montrer l'inégalité suivante*

$$\forall (x, y) \in U^2, \quad Df(x)(y-x) \leq Df(y)(y-x).$$

c'est-à-dire,

$$\forall (x, y) \in U^2, \quad (y-x) f'(x) \leq (y-x) f'(y). \tag{2.2}$$

Soit $(x, y) \in U^2$. On distingue les trois cas possibles :
- Si $x = y$ l'inégalité (2.2) est triviale.
- Si $x < y$ alors la croissance de f' entraîne $f'(x) \leq f'(y)$
et comme $y - x > 0$, on en déduit que

$$(y-x) f'(x) \leq (y-x) f'(y).$$

Réponse

- Si $x > y$ *alors la croissance de* f' *entraîne* $f'(x) \geq f'(y)$
et comme $y - x < 0$, *on en déduit que*

$$(y - x) f'(x) \leq (y - x) f'(y).$$

Donc dans tous les cas, l'inégalité (2.2) est satisfaite. D'où le résultat.

Remarque

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction* ***deux fois dérivable*** *sur un intervalle ouvert* U *de* $\mathbb{R}$, *alors* f *est convexe sur* U *si et seulement si*

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in U.$$

Réponse

- Si $x > y$ alors la croissance de f' entraîne $f'(x) \geq f'(y)$ et comme $y - x < 0$, on en déduit que

$$(y - x) f'(x) \leq (y - x) f'(y).$$

Donc dans tous les cas, l'inégalité (2.2) est satisfaite. D'où le résultat.

Remarque

*Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **deux fois dérivable** sur un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}$, alors f est convexe sur U si et seulement si*

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in U.$$

Réponse

3) On suppose que f est deux fois différentiable dans U. ***Montrons que f est convexe sur U si et seulement si,***

$$\forall x \in U,\ \forall h \in E, \quad D^2 f(x)(h,h) \geq 0. \tag{2.3}$$

$(\Rightarrow)$ *Supposons f convexe sur U et montrons (2.3). Soient $x \in U$ et $h \in E$. Puisque f est deux fois différentiable en x,*

$$D^2 f(x)(h,h) = \frac{d}{dt} Df(x+th) \cdot h \Big|_{t=0} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{Df(x+th)(h) - Df(x)(h)}{t}. \tag{2.4}$$

Pour tout $t \neq 0$ voisin de zero on a $x + th \in U$. Donc d'après l'équivalence i) $\Leftrightarrow$ iii) de la question 1), on obtient en appliquant iii) au couple $(x, x+th)$

$$Df(x+th)(th) \geq Df(x)(th)$$

Réponse

C'est-à-dire,

$$tDf(x+th)(h) - tDf(x)(h) \geq 0$$

D'où en divisant les deux membres de l'inégalité précédente par t^2 :

$$\frac{Df(x+th)(h) - Df(x)(h)}{t} \geq 0$$

En faisant tendre t vers 0 et en utilisant la relation (2.4), on obtient

$$D^2 f(x)(h,h) \geq 0.$$

D'où (2.3).

Autre méthode : *Soient $x \in U$ et $h \in E$. Puisque f est deux fois différentiable sur U, alors la fonction $t \mapsto g(t) = f(x+th)$ est deux fois dérivable sur un voisinage ouvert I de zéro dans $\mathbb{R}$. En particulier, on a*

$$g'(0) = Df(x)(h) \quad \text{et} \quad g''(0) = D^2 f(x)(h,h)$$

Réponse

Donc d'après la formule de Taylor-Young,

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g''(0) + t^2\varepsilon(t), \quad \forall t \in I$$

avec

$$\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

Autrement dit

$$f(x + th) - f(x) - tDf(x)(h) = \frac{t^2}{2}D^2 f(x)(h, h) + t^2\varepsilon(t), \quad \forall t \in I$$

Et comme f est convexe, alors d'après l'équivalence i) $\Leftrightarrow$ ii) de la question 1), on obtient en appliquant ii) au couple $(x, x + th)$

$$f(x + th) - f(x) \geq Df(x)(th), \quad \forall t \in I$$

Réponse

c'est-à-dire

$$f(x+th)-f(x)-tDf(x)(h)\geq 0,\quad \forall t\in I.$$

On en déduit alors que

$$\frac{t^2}{2}D^2f(x)(h,h)+t^2\varepsilon(t)\geq 0,\quad \forall t\in I.$$

En simplifiant par $\frac{t^2}{2}$ *il vient*

$$D^2f(x)(h,h)+2\varepsilon(t)\geq 0,\quad \forall t\in I\setminus\{0\}.$$

D'où en faisant tendre t *vers* 0*,*

$$D^2f(x)(h,h)\geq 0.$$

Réponse

($\Leftarrow$) *Supposons (2.3) vérifie et montrons que* f *convexe sur* U*. Fixons* $(x, y) \in U^2$*. Posons* $h = y - x$ *et considérons la fonction* $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(t) = f((1 - t)x + ty) = f(x + th), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Puisque f *est deux fois différentiable sur* U*, alors la fonction* g *est continue sur* $[0, 1]$ *et deux fois dérivable sur* $]0, 1[$*, et on a*

$$g'(t) = Df(x + th)(h) \quad \text{et} \quad g''(t) = D^2 f(x + th)(h, h)$$

Donc d'après l'hypothèse on a

$$g''(t) = D^2 f(x + th)(h, h) \geq 0, \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Cela montre que la fonction g *est convexe sur* $]0, 1[$ *d'après la question 2) (voir la remarque précédente).*

Réponse

Donc pour tous $\alpha, \beta \in]0,1[$ *et* $t \in [0,1]$ *on a*

$$g\left((1-t)\,\alpha + t\beta\right) \leq (1-t)\,g(\alpha) + t\,g(\beta)$$

Puisque g *est continue sur* $[0,1]$, *alors l'inégalité précédente est aussi vraie pour* $\alpha = 0$ *et* $\beta = 1$. *Donc*

$$\forall t \in [0,1], \quad g(t) \leq (1-t)\,g(0) + t\,g(1)$$

c'est-à-dire,

$$\forall t \in [0,1], \quad f\left((1-t)\,x + ty\right) \leq (1-t)\,f(x) + tf(y).$$

Ce qui signifie bien que f *est convexe.*

Réponse

4) On suppose f convexe et différentiable sur U. Soit $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$.

Montrons que f a un minimum absolu en a.

D'après l'équivalence i) $\Leftrightarrow$ ii) de la question 1), on a

$$\forall (x, y) \in U^2, \quad f(y) - f(x) \geq Df(x)(y - x).$$

En appliquant cette inégalité au couple (a, x), on obtient

$$\forall x \in U, \quad f(x) - f(a) \geq Df(a)(x - a) = 0.$$

D'où,

$$\boxed{\forall x \in U, \quad f(x) \geq f(a).}$$

Cela montre que f a un minimum absolu en a.

Plan

Exercice 3

Soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow E$ *une application de classe* C^2 *définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans un espace vectoriel normé* E. *On suppose qu'il existe deux constantes* $A > 0$ *et* $B > 0$ *telles que*

$$\|\phi(x)\| \leq A \quad \textit{et} \quad \|\phi''(x)\| \leq B \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1) *En appliquant la formule de Taylor, montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $h \in \mathbb{R}_+^*$, *on a :*

$$\|\phi'(x)\| \leq \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}.$$

2) *En déduire que* $\|\phi'(x)\| \leq \sqrt{2AB}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

3) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ une application de classe C^∞. On suppose que les dérivées d'ordre pair admettent dans $\mathbb{R}$ une majoration de la forme

$$\left\| f^{(2n)}(x) \right\| \leq M \times (2n)! \times k^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

où M et k sont des constantes > 0, indépendantes de n.

i) Quelles majorations peut-on en déduire pour les dérivées de f d'ordre impair ?
ii) En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ la série de Taylor $\sum_{n \geq 0} (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ converge vers $f(x)$ en tout point x d'un voisinage ouvert de x_0 que l'on précisera. Autrement dit, f est analytique dans $\mathbb{R}$.

Réponse

1) ***Montrons que*** $\|\phi'(x)\| \leq \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}$ ***pour tout*** $x \in \mathbb{R}$ ***et pour tout*** $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ *et* $h \in \mathbb{R}_+^*$. *En appliquant à* ϕ *la formule de Taylor entre les points* x *et* $x+h$, *et entre les points* x *et* $x-h$ *on obtient* Voir note 1

$$\left\|\phi(x+h) - \phi(x) - h\,\phi'(x)\right\| \leq \frac{Bh^2}{2}$$

$$\left\|\phi(x-h) - \phi(x) + h\,\phi'(x)\right\| \leq \frac{Bh^2}{2}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire $\|U - V\| \leq \|U\| + \|V\|$ *avec* $U = \phi(x+h) - \phi(x) - h\,\phi'(x)$ *et* $V = \phi(x-h) - \phi(x) + h\,\phi'(x)$ *on obtient*

$$\left\|\phi(x+h) - \phi(x-h) - 2h\,\phi'(x)\right\| \leq Bh^2.$$

Réponse

1) ***Montrons que*** $\|\phi'(x)\| \leq \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}$ ***pour tout*** $x \in \mathbb{R}$ ***et pour tout*** $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ *et* $h \in \mathbb{R}_+^*$. *En appliquant à* ϕ *la formule de Taylor entre les points* x *et* $x+h$, *et entre les points* x *et* $x-h$ *on obtient* Voir note 1

$$\left\|\phi(x+h) - \phi(x) - h\,\phi'(x)\right\| \leq \frac{Bh^2}{2}$$

$$\left\|\phi(x-h) - \phi(x) + h\,\phi'(x)\right\| \leq \frac{Bh^2}{2}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire $\|U - V\| \leq \|U\| + \|V\|$ *avec* $U = \phi(x+h) - \phi(x) - h\,\phi'(x)$ *et* $V = \phi(x-h) - \phi(x) + h\,\phi'(x)$ *on obtient*

$$\left\|\phi(x+h) - \phi(x-h) - 2h\,\phi'(x)\right\| \leq Bh^2.$$

Réponse

1) ***Montrons que*** $\|\phi'(x)\| \leq \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}$ ***pour tout*** $x \in \mathbb{R}$ ***et pour tout*** $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ *et* $h \in \mathbb{R}_+^*$. *En appliquant à* ϕ *la formule de Taylor entre les points* x *et* $x+h$, *et entre les points* x *et* $x-h$ *on obtient* Voir note 1

$$\left\|\phi(x+h) - \phi(x) - h\,\phi'(x)\right\| \leq \frac{Bh^2}{2}$$

$$\left\|\phi(x-h) - \phi(x) + h\,\phi'(x)\right\| \leq \frac{Bh^2}{2}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire $\|U - V\| \leq \|U\| + \|V\|$ *avec* $U = \phi(x+h) - \phi(x) - h\,\phi'(x)$ *et* $V = \phi(x-h) - \phi(x) + h\,\phi'(x)$ *on obtient*

$$\left\|\phi(x+h) - \phi(x-h) - 2h\,\phi'(x)\right\| \leq Bh^2.$$

Réponse

Par suite Voir note 2

$$\begin{aligned}\left\|2h\,\phi'(x)\right\| &\leq Bh^2 + \|\phi(x+h) - \phi(x-h)\| \\ &\leq Bh^2 + \|\phi(x+h)\| + \|\phi(x-h)\| \\ &\leq Bh^2 + 2A\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\left\|\phi'(x)\right\| \leq \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}.}$$

2) ***En déduisant que*** $\|\phi'(x)\| \leq \sqrt{2AB}$ ***pour tout*** $x \in \mathbb{R}$. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *fixé. D'après 1) on a*

$$\left\|\phi'(x)\right\| \leq \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}, \quad \forall h \in \mathbb{R}_+^*.$$

Réponse

Par suite Voir note 2

$$
\begin{aligned}
\left\|2h\,\phi'(x)\right\| &\leq Bh^2 + \left\|\phi(x+h) - \phi(x-h)\right\| \\
&\leq Bh^2 + \left\|\phi(x+h)\right\| + \left\|\phi(x-h)\right\| \\
&\leq Bh^2 + 2A
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\boxed{\left\|\phi'(x)\right\| \leq \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}.}
$$

*2) **En déduisant que** $\left\|\phi'(x)\right\| \leq \sqrt{2AB}$ **pour tout** $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. D'après 1) on a*

$$
\left\|\phi'(x)\right\| \leq \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}, \quad \forall h \in \mathbb{R}_+^*.
$$

Réponse

Donc

$$\left\|\phi'(x)\right\| \leq \inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right).$$

Nous allons montrer que $\inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right)=\sqrt{2AB}$*, en étudiant la fonction* $g:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie par*

$$g(h)=\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}.$$

La fonction g *est dérivable sur* $]0,+\infty[$*, et pour tout* $h\in]0,+\infty[$ *on a*

$$g'(h)=\frac{-A}{h^2}+\frac{B}{2}=\frac{Bh^2-2A}{2h^2}=\frac{B\left(h-\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)\left(h+\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)}{2h^2}$$

donc

$$g'(h)=0\Longleftrightarrow h=\sqrt{\frac{2A}{B}}$$

Réponse

Donc

$$\left\|\phi'(x)\right\| \leq \inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right).$$

Nous allons montrer que $\inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right)=\sqrt{2AB}$, *en étudiant la fonction* $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(h)=\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}.$$

La fonction g *est dérivable sur* $]0,+\infty[$, *et pour tout* $h\in\,]0,+\infty[$ *on a*

$$g'(h)=\frac{-A}{h^2}+\frac{B}{2}=\frac{Bh^2-2A}{2h^2}=\frac{B\left(h-\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)\left(h+\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)}{2h^2}$$

donc

$$g'(h)=0 \Longleftrightarrow h=\sqrt{\frac{2A}{B}}$$

Réponse

Donc

$$\left\|\phi'(x)\right\| \leq \inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right).$$

Nous allons montrer que $\inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right)=\sqrt{2AB}$*, en étudiant la fonction* $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(h)=\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}.$$

La fonction g *est dérivable sur* $]0,+\infty[$*, et pour tout* $h\in]0,+\infty[$ *on a*

$$g'(h)=\frac{-A}{h^2}+\frac{B}{2}=\frac{Bh^2-2A}{2h^2}=\frac{B\left(h-\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)\left(h+\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)}{2h^2}$$

donc

$$g'(h)=0 \Longleftrightarrow h=\sqrt{\frac{2A}{B}}$$

Réponse

Donc

$$\left\|\phi'(x)\right\| \leq \inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right).$$

Nous allons montrer que $\inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right)=\sqrt{2AB}$*, en étudiant la fonction* $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(h)=\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}.$$

La fonction g *est dérivable sur* $]0,+\infty[$*, et pour tout* $h \in]0,+\infty[$ *on a*

$$g'(h)=\frac{-A}{h^2}+\frac{B}{2}=\frac{Bh^2-2A}{2h^2}=\frac{B\left(h-\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)\left(h+\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)}{2h^2}$$

donc

$$g'(h)=0 \Longleftrightarrow h=\sqrt{\frac{2A}{B}}$$

Réponse

et

$$g'(h) > 0 \Longleftrightarrow h > \sqrt{\frac{2A}{B}}.$$

On a le tableau de variations suivant :

h	0		$\sqrt{\frac{2A}{B}}$		$+\infty$
$g'(h)$	||	$-$	0	$+$	
$g(h)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$g(\sqrt{\frac{2A}{B}})$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g admet un minimum absolu en $h_0 = \sqrt{\frac{2A}{B}}$.

Réponse

et

$$g'(h) > 0 \iff h > \sqrt{\frac{2A}{B}}.$$

On a le tableau de variations suivant :

h	0		$\sqrt{\frac{2A}{B}}$		$+\infty$
$g'(h)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(h)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$g(\sqrt{\frac{2A}{B}})$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g admet un minimum absolu en $h_0 = \sqrt{\frac{2A}{B}}$.

Réponse

et

$$g'(h) > 0 \Longleftrightarrow h > \sqrt{\frac{2A}{B}}.$$

On a le tableau de variations suivant :

h	0		$\sqrt{\frac{2A}{B}}$		$+\infty$
$g'(h)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$g(h)$	$\parallel$ $+\infty$	$\searrow$	$g(\sqrt{\frac{2A}{B}})$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g admet un minimum absolu en $h_0 = \sqrt{\frac{2A}{B}}$.

Réponse

Donc

$$\inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right)=g\left(\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)=A\sqrt{\frac{B}{2A}}+\frac{B}{2}\sqrt{\frac{2A}{B}}=\sqrt{2AB}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\left\|\phi'(x)\right\|\leq\sqrt{2AB}.}$$

3)Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow E$ une application de classe C^{∞}. On suppose que les dérivées d'ordre pair admettent dans $\mathbb{R}$ une majoration de la forme

$$\left\|f^{(2n)}(x)\right\|\leq M\times(2n)!\times k^{2n},\quad\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}.$$

où M et k sont des constantes >0, indépendantes de n.
*i) **Quelles majorations peut-on en déduire pour les dérivées de f d'ordre impair ?***

Réponse

Donc

$$\inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right)=g\left(\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)=A\sqrt{\frac{B}{2A}}+\frac{B}{2}\sqrt{\frac{2A}{B}}=\sqrt{2AB}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\left\|\phi'(x)\right\|\leq\sqrt{2AB}.}$$

3)Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow E$ une application de classe C^∞. On suppose que les dérivées d'ordre pair admettent dans $\mathbb{R}$ une majoration de la forme

$$\left\|f^{(2n)}(x)\right\|\leq M\times(2n)!\times k^{2n},\quad\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}.$$

où M et k sont des constantes >0, indépendantes de n.
i) ***Quelles majorations peut-on en déduire pour les dérivées de f d'ordre impair ?***

Réponse

Donc

$$\inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right)=g\left(\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)=A\sqrt{\frac{B}{2A}}+\frac{B}{2}\sqrt{\frac{2A}{B}}=\sqrt{2AB}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\left\|\phi'(x)\right\|\leq\sqrt{2AB}.}$$

3)Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow E$ une application de classe C^∞. On suppose que les dérivées d'ordre pair admettent dans $\mathbb{R}$ une majoration de la forme

$$\left\|f^{(2n)}(x)\right\|\leq M\times(2n)!\times k^{2n},\quad\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}.$$

où M et k sont des constantes >0, indépendantes de n.

i) Quelles majorations peut-on en déduire pour les dérivées de f d'ordre impair ?

Réponse

Donc

$$\inf_{h\in\mathbb{R}_+^*}\left(\frac{A}{h}+\frac{Bh}{2}\right)=g\left(\sqrt{\frac{2A}{B}}\right)=A\sqrt{\frac{B}{2A}}+\frac{B}{2}\sqrt{\frac{2A}{B}}=\sqrt{2AB}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\left\|\phi'(x)\right\|\leq\sqrt{2AB}.}$$

3)Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow E$ une application de classe C^{∞}. On suppose que les dérivées d'ordre pair admettent dans $\mathbb{R}$ une majoration de la forme

$$\left\|f^{(2n)}(x)\right\|\leq M\times(2n)!\times k^{2n},\quad\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}.$$

où M et k sont des constantes >0, indépendantes de n.
i) ***Quelles majorations peut-on en déduire pour les dérivées de*** f ***d'ordre impair ?***

Réponse

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on applique le résultat de la question 2) à la fonction $\phi = f^{(2n)}$. On a par hypothèse

$$\|\phi(x)\| = \left\|f^{(2n)}(x)\right\| \leq \underbrace{M \times (2n)! \times k^{2n}}_{A'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$\|\phi''(x)\| = \left\|f^{(2n+2)}(x)\right\| \leq \underbrace{M \times (2n+2)! \times k^{2n+2}}_{B'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc d'après 2) on a

$$\|\phi'(x)\| \leq \sqrt{2A'B'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Réponse

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on applique le résultat de la question 2) à la fonction $\phi = f^{(2n)}$. On a par hypothèse

$$\|\phi(x)\| = \left\|f^{(2n)}(x)\right\| \leq \underbrace{M \times (2n)! \times k^{2n}}_{A'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$\|\phi''(x)\| = \left\|f^{(2n+2)}(x)\right\| \leq \underbrace{M \times (2n+2)! \times k^{2n+2}}_{B'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc d'après 2) on a

$$\|\phi'(x)\| \leq \sqrt{2A'B'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Réponse

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on applique le résultat de la question 2) à la fonction $\phi = f^{(2n)}$. On a par hypothèse

$$\|\phi(x)\| = \left\|f^{(2n)}(x)\right\| \leq \underbrace{M \times (2n)! \times k^{2n}}_{A'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$\|\phi''(x)\| = \left\|f^{(2n+2)}(x)\right\| \leq \underbrace{M \times (2n+2)! \times k^{2n+2}}_{B'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc d'après 2) on a

$$\|\phi'(x)\| \leq \sqrt{2A'B'}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Réponse

C'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\left\| f^{(2n+1)}(x) \right\| &\leq \sqrt{2\left(M \times (2n)! \times k^{2n}\right)\left(M \times (2n+2)! \times k^{2n+2}\right)} \\
&= M \times (2n)!k^{2n+1}\sqrt{2(2n+2)(2n+1)} \\
&= 2M \times (2n)!k^{2n+1}\sqrt{(n+1)(2n+1)} \\
&= 2M \times (2n+1)!k^{2n+1}\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \\
&\leq 2M \times (2n+1)!k^{2n+1},
\end{aligned}$$

car $\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \leq 1$. *D'où*

$$\boxed{\left\| f^{(2n+1)}(x) \right\| \leq 2M \times (2n+1)!k^{2n+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Réponse

C'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\left\| f^{(2n+1)}(x) \right\| &\leq \sqrt{2\left(M \times (2n)! \times k^{2n}\right)\left(M \times (2n+2)! \times k^{2n+2}\right)} \\
&= M \times (2n)! k^{2n+1} \sqrt{2(2n+2)(2n+1)} \\
&= 2M \times (2n)! k^{2n+1} \sqrt{(n+1)(2n+1)} \\
&= 2M \times (2n+1)! k^{2n+1} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \\
&\leq 2M \times (2n+1)! k^{2n+1},
\end{aligned}$$

car $\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \leq 1$. *D'où*

$$\boxed{\left\| f^{(2n+1)}(x) \right\| \leq 2M \times (2n+1)! k^{2n+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Réponse

ii)En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ la série de Taylor $\sum_{n\geq 0}(x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ converge vers $f(x)$ en tout point x d'un voisinage ouvert de x_0 que l'on précisera.

Remarquons d'abord que

$$\left\|f^{(p)}(x)\right\| \leq 2M \times p! \times k^p, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on a, en appliquant la formule de Taylor à l'ordre p entre les points x_0 et x :

$$\left\|f(x) - \sum_{n=0}^{p}(x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right\| \leq \left(2M \times (p+1)! \times k^{p+1}\right) \frac{|x-x_0|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Réponse

ii)En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ la série de Taylor $\sum_{n\geq 0} (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ converge vers $f(x)$ en tout point x d'un voisinage ouvert de x_0 que l'on précisera.

Remarquons d'abord que

$$\left\| f^{(p)}(x) \right\| \leq 2M \times p! \times k^p, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on a, en appliquant la formule de Taylor à l'ordre p entre les points x_0 et x :

$$\left\| f(x) - \sum_{n=0}^{p} (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right\| \leq \left(2M \times (p+1)! \times k^{p+1} \right) \frac{|x - x_0|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Réponse

ii)En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ la série de Taylor $\sum_{n\geq 0} (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ converge vers $f(x)$ en tout point x d'un voisinage ouvert de x_0 que l'on précisera.

Remarquons d'abord que

$$\left\| f^{(p)}(x) \right\| \leq 2M \times p! \times k^p, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on a, en appliquant la formule de Taylor à l'ordre p entre les points x_0 et x :

$$\left\| f(x) - \sum_{n=0}^{p} (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right\| \leq \left(2M \times (p+1)! \times k^{p+1} \right) \frac{|x - x_0|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Réponse

c'est-à-dire,

$$\left\| f(x) - \sum_{n=0}^{p} (x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right\| \leq 2M \left| k(x-x_0) \right|^{p+1}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $|k(x-x_0)| < 1$, *le membre droit de l'inégalité précédente tend vers* 0 *lorsque* p *tend vers* $+\infty$. *On en déduit que la série* $\sum_{n \geq 0} (x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ *converge vers* $f(x)$ *pour tout* $x \in \left]x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}\right[$. *Donc*

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}} \quad \forall x \in \left]x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}\right[.$$

Cela montre que f *est analytique dans* $\mathbb{R}$.

Réponse

c'est-à-dire,

$$\left\| f(x) - \sum_{n=0}^{p} (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right\| \leq 2M \left| k(x - x_0) \right|^{p+1}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $|k(x - x_0)| < 1$*, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers* 0 *lorsque* p *tend vers* $+\infty$*. On en déduit que la série* $\sum_{n \geq 0} (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ *converge vers* $f(x)$ *pour tout* $x \in \left] x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k} \right[$*. Donc*

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}} \quad \forall x \in \left] x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k} \right[.$$

Cela montre que f *est analytique dans* $\mathbb{R}$*.*

Plan

Exercice 4

Soit E un espace de Hilbert, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée. Posons $U = E \setminus \{0\}$.

1) *Montrer que l'application $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\alpha(x) = \frac{1}{\|x\|^2}, \quad (\forall x \in U)$$

   est de classe C^1 sur U et calculer sa différentielle en tout point de U.

2) *On considère l'application $f : U \longrightarrow E$ définie par*

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}, \quad (\forall x \in U).$$

   i) *Montrer que f est de classe C^1 sur U et donner l'expression de sa différentielle en tout point de U.*

ii) Montrer que f est une bijection de U sur U puis que f est un C^1-difféomorphisme de U sur U. Déterminer $[Df(x)]^{-1} \in \mathrm{Isom}(E)$ pour tout $x \in U$.

Réponse

*1) **Montrons que l'application** α **est de classe** C^1 **sur** U **et calculons sa différentielle en tout point de** U.*

Pour $x \in U$ on a

$$\alpha(x) = \frac{1}{\|x\|^2} = \frac{1}{\langle x, x\rangle} = \frac{1}{q(x)}$$

avec q est l'application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$q(x) = \langle x, x\rangle, \quad (\forall x \in E).$$

ii) Montrer que f est une bijection de U sur U puis que f est un C^1-difféomorphisme de U sur U. Déterminer $[Df(x)]^{-1} \in \mathrm{Isom}(E)$ pour tout $x \in U$.

Réponse

1) Montrons que l'application α est de classe C^1 sur U et calculons sa différentielle en tout point de U.

Pour $x \in U$ on a

$$\alpha(x) = \frac{1}{\|x\|^2} = \frac{1}{\langle x, x\rangle} = \frac{1}{q(x)}$$

avec q est l'application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$q(x) = \langle x, x\rangle, \quad (\forall x \in E).$$

Réponse

On sait que q est de classe C^1 sur E (c'est la forme quadratique associée au produit scalaire) et on a

$$Dq\,(x)\,(h) = 2\,\langle x, h\rangle\,, \quad (\forall x \in E)\,(\forall h \in E)\,.$$

Puisque $q\,(x) = \langle x, x\rangle \neq 0$ pour $x \in U$, on en déduit que l'application $\alpha = \frac{1}{q}$ est de classe C^1 sur U. De plus, sa différentielle en tout point $x \in U$ a pour expression

$$\boxed{D\alpha\,(x)\,(h) = \frac{-Dq\,(x)\,(h)}{[q\,(x)]^2} = \frac{-2\,\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}}, \quad (\forall h \in E)\,.$$

Réponse

On sait que q est de classe C^1 sur E (c'est la forme quadratique associée au produit scalaire) et on a

$$Dq(x)(h) = 2\langle x, h\rangle, \quad (\forall x \in E)(\forall h \in E).$$

Puisque $q(x) = \langle x, x\rangle \neq 0$ *pour* $x \in U$, *on en déduit que l'application* $\alpha = \frac{1}{q}$ *est de classe* C^1 *sur U. De plus, sa différentielle en tout point* $x \in U$ *a pour expression*

$$\boxed{D\alpha(x)(h) = \frac{-Dq(x)(h)}{[q(x)]^2} = \frac{-2\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}}, \quad (\forall h \in E).$$

Réponse

2) On considère l'application $f : U \longrightarrow E$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}, \quad (\forall x \in U).$$

i) ***Montrons que f est de classe C^1 sur U et donnons l'expression de sa différentielle en tout point de U.***

Remarquons que l'application f est la composée $f = \psi \circ p$ des applications suivantes :

$$\begin{array}{rccc} p: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \times E \\ & x & \longmapsto & (\alpha(x), x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

Réponse

2) On considère l'application $f : U \longrightarrow E$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}, \quad (\forall x \in U).$$

i) ***Montrons que f est de classe C^1 sur U et donnons l'expression de sa différentielle en tout point de U.***
Remarquons que l'application f est la composée $f = \psi \circ p$ des applications suivantes :

$$\begin{array}{rccl} p: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \times E \\ & x & \longmapsto & (\alpha(x), x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

Réponse

- L'application p est de classe C^1 sur U car ses deux composantes $p_1 = \alpha$ et $p_2 = \mathrm{Id}_U$ le sont. De plus,

$$Dp\,(x)\,(h) = (D\alpha\,(x)\,(h)\,, h) = \left(\frac{-2\,\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}, h\right), \quad (\forall x \in U)\,(\forall h \in E)\,.$$

*- L'application ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times E$ car elle est **bilinéaire continue**. De plus,*

$$D\psi\,(\lambda, x)\,(\delta, h) = \psi\,(\delta, x) + \psi\,(\lambda, h) = \delta x + \lambda h, \quad \forall\,(\lambda, x) \in \mathbb{R}\times E, (\delta, h) \in \mathbb{R}\times$$

Réponse

- *L'application p est de classe C^1 sur U car ses deux composantes $p_1 = \alpha$ et $p_2 = \mathrm{Id}_U$ le sont. De plus,*

$$Dp(x)(h) = (D\alpha(x)(h), h) = \left(\frac{-2\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}, h\right), \quad (\forall x \in U)(\forall h \in E).$$

- *L'application ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times E$ car elle est* ***bilinéaire continue****. De plus,*

$$D\psi(\lambda, x)(\delta, h) = \psi(\delta, x) + \psi(\lambda, h) = \delta x + \lambda h, \quad \forall(\lambda, x) \in \mathbb{R}\times E, (\delta, h) \in \mathbb{R}\times$$

Réponse

Par conséquent, l'application $f = \psi \circ p$ est de classe C^1 sur U, et pour tout $x \in U$ on a

$$Df(x) = D\psi(p(x)) \circ Dp(x)$$

Par suite pour tout $h \in E$ on a

$$\begin{aligned} Df(x)(h) &= D\psi(p(x))(Dp(x)(h)) \\ &= D\psi(\alpha(x), x)\left(\frac{-2\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}, h\right) \\ &= \frac{-2\langle x, h\rangle}{\|x\|^4} x + \alpha(x) h \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Df(x)(h) = \frac{-2\langle x, h\rangle}{\|x\|^4} x + \frac{h}{\|x\|^2}}, \quad (\forall x \in U)(\forall h \in E). \tag{4.1}$$

Réponse

*ii)- **Montrons que** f **est une bijection de** U **sur** U.*

Il est clair que $f(U) \subset U$. Soit $y \in U$ donné. Montrons que l'équation

$$\boxed{f(x) = y} \tag{4.2}$$

admet une solution et une seule dans U.

Si $x \in U$ est une solution de (4.2) alors nécessairement $\|f(x)\| = \|y\|$, c'est-à-dire, $\left\| \frac{x}{\|x\|^2} \right\| = \|y\|$, donc $\frac{1}{\|x\|} = \|y\|$. D'où $\|x\| = \frac{1}{\|y\|}$.

Et comme $\frac{x}{\|x\|^2} = y$, alors $x = \|x\|^2 y$, par suite

$$\boxed{x = \frac{y}{\|y\|^2}.}$$

Réponse

ii)- ***Montrons que*** f ***est une bijection de*** U ***sur*** U.

Il est clair que $f(U) \subset U$. *Soit* $y \in U$ *donné. Montrons que l'équation*

$$\boxed{f(x) = y} \tag{4.2}$$

admet une solution et une seule dans U.

Si $x \in U$ *est une solution de (4.2) alors nécessairement* $\|f(x)\| = \|y\|$, *c'est-à-dire,* $\left\|\frac{x}{\|x\|^2}\right\| = \|y\|$, *donc* $\frac{1}{\|x\|} = \|y\|$. *D'où* $\|x\| = \frac{1}{\|y\|}$.

Et comme $\frac{x}{\|x\|^2} = y$, *alors* $x = \|x\|^2 y$, *par suite*

$$\boxed{x = \frac{y}{\|y\|^2}.}$$

Réponse

Réciproquement on vérifie facilement que le vecteur $\frac{y}{\|y\|^2}$ est une solution de (4.2). En effet,

$$f\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right) = \frac{\frac{y}{\|y\|^2}}{\left\|\frac{y}{\|y\|^2}\right\|^2} = \frac{\frac{y}{\|y\|^2}}{\left(\frac{1}{\|y\|}\right)^2} = y.$$

Par conséquent, l'équation (4.2) admet une solution et une seule dans U ; cette solution est le vecteur $\frac{y}{\|y\|^2}$.

Cela montre que l'application f est une bijection de U sur U.

L'application inverse est

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & U & \longrightarrow & U \\ & y & \longmapsto & \frac{y}{\|y\|^2} \end{array}$$

De plus, on a $f = f^{-1}$.

Réponse

Réciproquement on vérifie facilement que le vecteur $\frac{y}{\|y\|^2}$ *est une solution de (4.2). En effet,*

$$f\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right) = \frac{\frac{y}{\|y\|^2}}{\left\|\frac{y}{\|y\|^2}\right\|^2} = \frac{\frac{y}{\|y\|^2}}{\left(\frac{1}{\|y\|}\right)^2} = y.$$

Par conséquent, l'équation (4.2) admet une solution et une seule dans U *; cette solution est le vecteur* $\frac{y}{\|y\|^2}$.

Cela montre que l'application f *est une bijection de* U *sur* U.
L'application inverse est

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & U & \longrightarrow & U \\ & y & \longmapsto & \frac{y}{\|y\|^2} \end{array}$$

De plus, on a $f = f^{-1}$.

Réponse

Réciproquement on vérifie facilement que le vecteur $\frac{y}{\|y\|^2}$ est une solution de (4.2). En effet,

$$f\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right) = \frac{\frac{y}{\|y\|^2}}{\left\|\frac{y}{\|y\|^2}\right\|^2} = \frac{\frac{y}{\|y\|^2}}{\left(\frac{1}{\|y\|}\right)^2} = y.$$

Par conséquent, l'équation (4.2) admet une solution et une seule dans U ; cette solution est le vecteur $\frac{y}{\|y\|^2}$.
Cela montre que l'application f est une bijection de U sur U.
L'application inverse est

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & U & \longrightarrow & U \\ & y & \longmapsto & \frac{y}{\|y\|^2} \end{array}$$

De plus, on a $f = f^{-1}$.

Réponse

Réciproquement on vérifie facilement que le vecteur $\frac{y}{\|y\|^2}$ *est une solution de (4.2). En effet,*

$$f\left(\frac{y}{\|y\|^2}\right) = \frac{\frac{y}{\|y\|^2}}{\left\|\frac{y}{\|y\|^2}\right\|^2} = \frac{\frac{y}{\|y\|^2}}{\left(\frac{1}{\|y\|}\right)^2} = y.$$

Par conséquent, l'équation (4.2) admet une solution et une seule dans U *; cette solution est le vecteur* $\frac{y}{\|y\|^2}$.
Cela montre que l'application f *est une bijection de* U *sur* U.
L'application inverse est

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & U & \longrightarrow & U \\ & y & \longmapsto & \frac{y}{\|y\|^2} \end{array}$$

De plus, on a $f = f^{-1}$.

Réponse

-Montrons que f est un C^1-difféomorphisme de U sur U.

Puisque f est une bijection de U sur U et que f et $f^{-1} = f$ sont de C^1 sur U, alors (d'après la définition) f est un C^1-difféomorphisme de U sur U.

-Déterminons $[Df(x)]^{-1} \in \mathrm{Isom}(E)$ pour tout $x \in U$.

Puisque f est un C^1-difféomorphisme de U sur U, alors pour tout $x \in U$,

$$Df(x) \in \mathrm{Isom}(E),$$

en particulier, $Df(x)$ est bijective. Or $f = f^{-1}$, donc $f \circ f = \mathrm{Id}_U$. Par suite,

$$Df(f(x)) \circ Df(x) = \mathrm{Id}_E$$

D'où

$$[Df(x)]^{-1} = Df(f(x)).$$

Réponse

-***Montrons que*** f ***est un*** C^1***-difféomorphisme de*** U ***sur*** U***.***

Puisque f est une bijection de U sur U et que f et $f^{-1} = f$ sont de C^1 sur U, alors (d'après la définition) f est un C^1-difféomorphisme de U sur U.

-***Déterminons*** $[Df(x)]^{-1} \in \mathrm{Isom}(E)$ ***pour tout*** $x \in U$.

Puisque f est un C^1-difféomorphisme de U sur U, alors pour tout $x \in U$,

$$Df(x) \in \mathrm{Isom}(E),$$

en particulier, $Df(x)$ est bijective. Or $f = f^{-1}$, donc $f \circ f = \mathrm{Id}_U$. Par suite,

$$Df(f(x)) \circ Df(x) = \mathrm{Id}_E$$

D'où

$$[Df(x)]^{-1} = Df(f(x)).$$

Réponse

-***Montrons que*** f ***est un*** C^1***-difféomorphisme de*** U ***sur*** U***.***
Puisque f *est une bijection de* U *sur* U *et que* f *et* $f^{-1} = f$ *sont de* C^1 *sur* U*, alors (d'après la définition)* f *est un* C^1*-difféomorphisme de* U *sur* U*.*
-Déterminons $[Df(x)]^{-1} \in \mathrm{Isom}(E)$ ***pour tout*** $x \in U$.
Puisque f *est un* C^1*-difféomorphisme de* U *sur* U*, alors pour tout* $x \in U$*,*

$$Df(x) \in \mathrm{Isom}(E),$$

en particulier, $Df(x)$ *est bijective. Or* $f = f^{-1}$*, donc* $f \circ f = \mathrm{Id}_U$*. Par suite,*

$$Df(f(x)) \circ Df(x) = \mathrm{Id}_E$$

D'où

$$[Df(x)]^{-1} = Df(f(x)).$$

Réponse

*-**Montrons que** f **est un** C^1**-difféomorphisme de** U **sur** U**.***
Puisque f est une bijection de U sur U et que f et $f^{-1} = f$ sont de C^1 sur U, alors (d'après la définition) f est un C^1-difféomorphisme de U sur U.
***-Déterminons** $[Df(x)]^{-1} \in \mathrm{Isom}(E)$ **pour tout** $x \in U$.*
Puisque f est un C^1-difféomorphisme de U sur U, alors pour tout $x \in U$,

$$Df(x) \in \mathrm{Isom}(E),$$

en particulier, $Df(x)$ est bijective. Or $f = f^{-1}$, donc $f \circ f = \mathrm{Id}_U$. Par suite,

$$Df(f(x)) \circ Df(x) = \mathrm{Id}_E$$

D'où

$$[Df(x)]^{-1} = Df(f(x)).$$

Réponse

*-**Montrons que** f **est un** C^1**-difféomorphisme de** U **sur** U**.***

Puisque f est une bijection de U sur U et que f et $f^{-1} = f$ sont de C^1 sur U, alors (d'après la définition) f est un C^1-difféomorphisme de U sur U.

***-Déterminons** $[Df(x)]^{-1} \in \mathrm{Isom}(E)$ **pour tout** $x \in U$.*

Puisque f est un C^1-difféomorphisme de U sur U, alors pour tout $x \in U$,

$$Df(x) \in \mathrm{Isom}(E),$$

en particulier, $Df(x)$ est bijective. Or $f = f^{-1}$, donc $f \circ f = \mathrm{Id}_U$. Par suite,

$$Df(f(x)) \circ Df(x) = \mathrm{Id}_E$$

D'où

$$[Df(x)]^{-1} = Df(f(x)).$$

Réponse

Donc en utilisant (4.1) on a pour tout $h \in E$,

$$\begin{aligned}[Df(x)]^{-1}(h) &= Df(f(x))(h)\\ &= \frac{-2\langle f(x), h\rangle}{\|f(x)\|^4} f(x) + \frac{h}{\|f(x)\|^2}\end{aligned}$$

Or on a $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ et $\|f(x)\| = \frac{1}{\|x\|}$. Donc

$$\begin{aligned}[Df(x)]^{-1}(h) &= \frac{-2\left\langle \frac{x}{\|x\|^2}, h\right\rangle}{\left(\frac{1}{\|x\|}\right)^4} \frac{x}{\|x\|^2} + \frac{h}{\left(\frac{1}{\|x\|}\right)^2}\\ &= -2\langle x, h\rangle x + \|x\|^2 h\end{aligned}$$

Réponse

Donc en utilisant (4.1) on a pour tout $h \in E$,

$$\begin{aligned}[Df(x)]^{-1}(h) &= Df(f(x))(h) \\ &= \frac{-2\langle f(x), h\rangle}{\|f(x)\|^4} f(x) + \frac{h}{\|f(x)\|^2}\end{aligned}$$

Or on a $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ *et* $\|f(x)\| = \frac{1}{\|x\|}$. *Donc*

$$\begin{aligned}[Df(x)]^{-1}(h) &= \frac{-2\left\langle \frac{x}{\|x\|^2}, h\right\rangle}{\left(\frac{1}{\|x\|}\right)^4} \frac{x}{\|x\|^2} + \frac{h}{\left(\frac{1}{\|x\|}\right)^2} \\ &= -2\langle x, h\rangle x + \|x\|^2 h\end{aligned}$$

Réponse

Donc en utilisant (4.1) on a pour tout $h \in E$,

$$\begin{aligned} [Df(x)]^{-1}(h) &= Df(f(x))(h) \\ &= \frac{-2\langle f(x), h\rangle}{\|f(x)\|^4} f(x) + \frac{h}{\|f(x)\|^2} \end{aligned}$$

Or on a $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ *et* $\|f(x)\| = \frac{1}{\|x\|}$. *Donc*

$$\begin{aligned} [Df(x)]^{-1}(h) &= \frac{-2\left\langle \frac{x}{\|x\|^2}, h\right\rangle}{\left(\frac{1}{\|x\|}\right)^4} \frac{x}{\|x\|^2} + \frac{h}{\left(\frac{1}{\|x\|}\right)^2} \\ &= -2\langle x, h\rangle x + \|x\|^2 h \end{aligned}$$

Réponse

D'où

$$\boxed{[Df(x)]^{-1}(h) = -2\langle x, h\rangle x + \|x\|^2 h}, \quad (\forall x \in U)(\forall h \in E).$$

C'est-à-dire,

$$\begin{array}{rccl} [Df(x)]^{-1}: & E & \longrightarrow & E \\ & h & \longmapsto & -2\langle x, h\rangle x + \|x\|^2 h \end{array}$$

Autre méthode : *Puisque pour tout $x \in U$, $Df(x)$ est bijective, alors pour déterminer $[Df(x)]^{-1}$ il suffit de résoudre l'équation suivante*

$$Df(x)(k) = h$$

pour chaque $h \in E$ donné (de manière à avoir $k = [Df(x)]^{-1}(h)$).

Réponse

D'où

$$\boxed{[Df(x)]^{-1}(h) = -2\langle x, h\rangle x + \|x\|^2 h}, \quad (\forall x \in U)(\forall h \in E).$$

C'est-à-dire,

$$[Df(x)]^{-1} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ h & \longmapsto & -2\langle x, h\rangle x + \|x\|^2 h \end{array}$$

Autre méthode : *Puisque pour tout $x \in U$, $Df(x)$ est bijective, alors pour déterminer $[Df(x)]^{-1}$ il suffit de résoudre l'équation suivante*

$$Df(x)(k) = h$$

pour chaque $h \in E$ donné (de manière à avoir $k = [Df(x)]^{-1}(h)$).

Réponse

L'équation $Df(x)(k) = h$ *s'écrit*

$$\frac{-2\langle x, k\rangle}{\|x\|^4}x + \frac{k}{\|x\|^2} = h \tag{4.3}$$

En faisant le produit scalaire avec le vecteur x*, il vient*

$$\frac{-2\langle x, k\rangle}{\|x\|^4}\langle x, x\rangle + \frac{\langle x, k\rangle}{\|x\|^2} = \langle x, h\rangle$$

c'est-à-dire,

$$\frac{-2\langle x, k\rangle}{\|x\|^2} + \frac{\langle x, k\rangle}{\|x\|^2} = \langle x, h\rangle$$

donc

$$\langle x, k\rangle = -\|x\|^2\langle x, h\rangle.$$

D'où, en remplaçant $\langle x, k\rangle$ *par* $-\|x\|^2\langle x, h\rangle$ *dans (4.3)*

Réponse

L'équation $Df(x)(k) = h$ *s'écrit*

$$\frac{-2\langle x,k\rangle}{\|x\|^4}x + \frac{k}{\|x\|^2} = h \tag{4.3}$$

En faisant le produit scalaire avec le vecteur x*, il vient*

$$\frac{-2\langle x,k\rangle}{\|x\|^4}\langle x,x\rangle + \frac{\langle x,k\rangle}{\|x\|^2} = \langle x,h\rangle$$

c'est-à-dire,

$$\frac{-2\langle x,k\rangle}{\|x\|^2} + \frac{\langle x,k\rangle}{\|x\|^2} = \langle x,h\rangle$$

donc

$$\langle x,k\rangle = -\|x\|^2\langle x,h\rangle .$$

D'où, en remplaçant $\langle x,k\rangle$ *par* $-\|x\|^2\langle x,h\rangle$ *dans (4.3)*

Réponse

L'équation $Df(x)(k) = h$ *s'écrit*

$$\frac{-2\langle x,k\rangle}{\|x\|^4}x + \frac{k}{\|x\|^2} = h \tag{4.3}$$

En faisant le produit scalaire avec le vecteur x*, il vient*

$$\frac{-2\langle x,k\rangle}{\|x\|^4}\langle x,x\rangle + \frac{\langle x,k\rangle}{\|x\|^2} = \langle x,h\rangle$$

c'est-à-dire,

$$\frac{-2\langle x,k\rangle}{\|x\|^2} + \frac{\langle x,k\rangle}{\|x\|^2} = \langle x,h\rangle$$

donc

$$\langle x,k\rangle = -\|x\|^2\langle x,h\rangle .$$

D'où, en remplaçant $\langle x,k\rangle$ *par* $-\|x\|^2\langle x,h\rangle$ *dans (4.3)*

Réponse

$$\frac{+2\left\|x\right\|^2\left\langle x,h\right\rangle}{\left\|x\right\|^4}x+\frac{k}{\left\|x\right\|^2}=h$$

c'est-à-dire,

$$\frac{k}{\left\|x\right\|^2}=h-\frac{2\left\langle x,h\right\rangle}{\left\|x\right\|^2}x$$

Donc

$$k=\left\|x\right\|^2h-2\left\langle x,h\right\rangle x$$

D'où

$$\boxed{\left[Df(x)\right]^{-1}(h)=-2\left\langle x,h\right\rangle x+\left\|x\right\|^2h}.$$

Réponse

$$\frac{+2\left\|x\right\|^2\langle x,h\rangle}{\left\|x\right\|^4}x+\frac{k}{\left\|x\right\|^2}=h$$

c'est-à-dire,

$$\frac{k}{\left\|x\right\|^2}=h-\frac{2\langle x,h\rangle}{\left\|x\right\|^2}x$$

Donc

$$k=\left\|x\right\|^2h-2\langle x,h\rangle x$$

D'où

$$\boxed{[Df(x)]^{-1}(h)=-2\langle x,h\rangle x+\left\|x\right\|^2h}.$$

Réponse

$$\frac{+2\left\|x\right\|^{2}\left\langle x,h\right\rangle}{\left\|x\right\|^{4}}x+\frac{k}{\left\|x\right\|^{2}}=h$$

c'est-à-dire,

$$\frac{k}{\left\|x\right\|^{2}}=h-\frac{2\left\langle x,h\right\rangle}{\left\|x\right\|^{2}}x$$

Donc

$$k=\left\|x\right\|^{2}h-2\left\langle x,h\right\rangle x$$

D'où

$$\boxed{\left[Df\left(x\right)\right]^{-1}\left(h\right)=-2\left\langle x,h\right\rangle x+\left\|x\right\|^{2}h}.$$

Plan

Exercice 5

Soit E un espace de Banach, et soit $\mathscr{L}(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E. On note $I = id_E$ l'application identique de E.

1) *Montrer que l'application $q : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ définie par*

$$q(u) = u^2,$$

est de classe C^1 sur $\mathscr{L}(E)$ et déterminer sa différentielle.

2) *En déduire que l'application $f : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ définie par*

$$f(u) = u^2 - u,$$

est de classe C^1 sur $\mathscr{L}(E)$ et déterminer sa différentielle.

3) *Montrer que f est un isomorphisme local en I.*

4) Considérons l'application $g : \mathrm{Isom}\,(E) \longrightarrow \mathscr{L}\,(E)$ définie par

$$g(u) = u^2 - u + u^{-1}.$$

Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathrm{Isom}\,(E)$ et déterminer sa différentielle.

5) Calculer, $g\,(I)$ et $Dg\,(I)$, puis montrer qu'il existe une boule fermée $\overline{B} \subset \mathrm{Isom}\,(E)$ centrée en I et de rayon $r > 0$ telle que

$$\forall u \in \overline{B}, \quad \|Dg\,(u)\| \leq \frac{1}{2}.$$

6) En déduire que $\forall u \in \overline{B}, \quad \|g\,(u) - I\| \leq \frac{1}{2}\,\|u - I\|$, et que $\overline{B}$ est stable par l'application g.

7) Soit $u_0 \in \overline{B}$ et l'on définit par récurrence $u_{n+1} = g\,(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers I.

Réponse

*1) **Montrons que l'application** q **est de classe** C^1 **sur** $\mathscr{L}(E)$ **et déterminons sa différentielle.***

L'application q est la composée $q = \psi \circ p$ des applications suivantes :

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E) \\ & u & \longmapsto & (u, u) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ & (u, v) & \longmapsto & v \circ u \end{array}.$$

*- L'application p est **linéaire continue** car ses composantes $p_1 = Id_{\mathscr{L}(E)}$ et $p_2 = Id_{\mathscr{L}(E)}$ le sont. Donc p est de classe C^1 sur $\mathscr{L}(E)$, et pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ on a $Dp(u) = p$. D'où*

$$Dp(u)(h) = p(h) = (h, h), \quad \forall h \in \mathscr{L}(E).$$

Réponse

- *L'application* ψ *est* ***bilinéaire continue***. *Donc* ψ *est classe* C^1 *sur* $\mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$, *et* $\forall (u, v) \in [\mathscr{L}(E)]^2$ *et* $\forall (h, k) \in [\mathscr{L}(E)]^2$,

$$D\psi(u, v)(h, k) = \psi(h, v) + \psi(u, k) = v \circ h + k \circ u.$$

Par conséquent l'application $q = \psi \circ p$ *est classe* C^1 *sur* $\mathscr{L}(E)$, *et pour tout* $u \in \mathscr{L}(E)$ *on a*

$$Dq(u) = D\psi(p(u)) \circ Dp(u)$$

Donc pour tout $h \in \mathscr{L}(E)$ *on a :*

$$\begin{aligned} Dq(u)(h) &= D\psi(p(u))(Dp(u)(h)) \\ &= D\psi(u, u)(h, h) \\ &= \psi(h, u) + \psi(u, h) \\ &= u \circ h + h \circ u \end{aligned}$$

Réponse

D'où

$$\boxed{Dq(u)(h) = u \circ h + h \circ u} \quad \forall u \in \mathscr{L}(E), \ \forall h \in \mathscr{L}(E).$$

2) ***Déduisant que l'application*** f ***est de classe*** C^1 ***sur*** $\mathscr{L}(E)$ ***et déterminer sa différentielle.***

On a $f = q - Id_{\mathscr{L}(E)}$

Donc l'application f *est de classe* C^1 *sur* $\mathscr{L}(E)$ *comme différence de deux applications de classe* C^1 *sur* $\mathscr{L}(E)$*. De plus, pour tout* $u \in \mathscr{L}(E)$ *on a*

$$Df(u) = Dq(u) - Id_{\mathscr{L}(E)}.$$

Donc

$$\boxed{Df(u)(h) = u \circ h + h \circ u - h} \quad \forall u \in \mathscr{L}(E), \ \forall h \in \mathscr{L}(E).$$

Réponse

3) ***Montrons que*** f ***est un isomorphisme local en*** I***.***

D'après la question précédente, l'application f *est de classe* C^1 *sur* $\mathscr{L}(E)$*. De plus, pour* $u = I = id_E$ *on a*

$$Df(I)(h) = I \circ h + h \circ I - h = h, \quad \forall h \in \mathscr{L}(E).$$

donc

$$\boxed{Df(I) = Id_{\mathscr{L}(E)} \in \mathrm{Ismo}(\mathscr{L}(E), \mathscr{L}(E)).}$$

Et comme E *est un espace de Banach, alors* $\mathscr{L}(E)$ *est aussi un espace de Banach. Donc on peut appliquer le Théorème d'inversion locale au point* I*. Il existe alors un voisinage ouvert* V *de* I *dans* $\mathscr{L}(E)$ *et un voisinage ouvert* W *de* $f(I) = 0$ *dans* $\mathscr{L}(E)$ *tel que la restriction de* f *à* V *est un* C^1-*difféomorphisme de* V *sur* W*. Autrement dit,* f *est un* C^1-*difféomorphisme local en* I*.*

Réponse

4) ***Montrons que*** g ***est de classe*** C^1 ***sur*** $\mathrm{Isom}\,(E)$ ***et déterminons sa différentielle.***

Pour tout $u \in \mathrm{Isom}\,(E)$ *on a*

$$g(u) = u^2 - u + u^{-1} = f\,(u) + \varphi\,(u)$$

avec φ *est l'application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathrm{Isom}\,(E) & \longrightarrow & \mathrm{Isom}\,(E) \\ & u & \longmapsto & u^{-1} \end{array}$$

D'après la question 2) l'application f *est de classe* C^1 *sur* $\mathscr{L}\,(E)$*, en particulier* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathrm{Isom}\,(E)$*. On sait d'après le cours que l'application* φ *est de classe* C^1 *sur* $\mathrm{Isom}\,(E)$ *et que*

$$D\varphi\,(u)\,(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}, \quad \forall u \in \mathrm{Isom}\,(E)\,,\ \forall h \in \mathscr{L}\,(E)\,.$$

Réponse

Donc l'application g est de classe C^1 sur $\mathrm{Isom}(E)$ comme somme de deux applications de classe C^1 sur $\mathrm{Isom}(E)$. De plus, pour tous $u \in \mathrm{Isom}(E)$ et $h \in \mathscr{L}(E)$ on a

$$\begin{aligned} Dg(u)(h) &= Df(u)(h) + D\varphi(u)(h) \\ &= u \circ h + h \circ u - h - u^{-1} \circ h \circ u^{-1} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Dg(u)(h) = u \circ h + h \circ u - h - u^{-1} \circ h \circ u^{-1}} \qquad \begin{array}{c} \forall u \in \mathrm{Isom}(E) \\ \forall h \in \mathscr{L}(E) \end{array}$$

Réponse

5) Calcul de $g(I)$ et $Dg(I)$:
- On a

$$g(I) = I^2 - I + I^{-1} = I - I + I = I.$$

-D'après la question précédente, pour tout $h \in \mathscr{L}(E)$ on a

$$\begin{aligned} Dg(I)(h) &= I \circ h + h \circ I - h - I^{-1} \circ h \circ I^{-1} \\ &= h + h - h - h = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{Dg(I) = 0.}$$

- Montrons qu'il existe une boule fermée $\overline{B} \subset \mathrm{Isom}(E)$ centrée en I et de rayon $r > 0$ telle que

$$\forall u \in \overline{B}, \quad \|Dg(u)\| \leq \frac{1}{2}.$$

Réponse

Notons que $B(I,1) \subset \mathrm{Isom}(E)$ *(car si* $u \in \mathscr{L}(E)$ *tel que* $\|I-u\| < 1$ *alors* $u \in \mathrm{Isom}(E)$*).*
Puisque g *est de classe* C^1 *sur* $\mathrm{Isom}(E)$*, alors* Dg *est continue sur l'ouvert* $\mathrm{Isom}(E)$*, en particulier* Dg *est continue en* $I = id_E \in \mathrm{Isom}(E)$*.*
Donc pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$*, il existe* $r > 0$ *(auquel nous pouvons imposer de vérifier* $r < 1$*) tel que pour tout* $u \in \mathrm{Isom}(E)$ *on a*

$$\|u-I\| \leq r \Rightarrow \|Dg(u)\| = \|Dg(u) - Dg(I)\| \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $\overline{B} = \overline{B}(I,r)$ *la boule fermée de centre* I *et de rayon* r *dans* $\mathscr{L}(E)$*.*
Alors $\overline{B} \subset \mathrm{Isom}(E)$ *et*

$$\boxed{\forall u \in \overline{B}, \quad \|Dg(u)\| \leq \frac{1}{2}.}$$

Réponse

*6) - **En déduisant que*** $\forall u \in \overline{B}, \quad \|g(u) - I\| \leq \frac{1}{2}\|u - I\|$.

D'après ce qui précède, l'application g est différentiable sur $\mathrm{Isom}(E)$, *et sur la boule fermée* $\overline{B} \subset \mathrm{Isom}(E)$ *on a*

$$\forall u \in \overline{B}, \quad \|Dg(u)\| \leq \frac{1}{2}.$$

Donc d'après le T.A.F on a

$$\|g(u) - g(v)\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|, \quad \forall (u, v) \in \overline{B}^2.$$

En particulier, en prenant $v = I$, *on obtient*

$$\boxed{\|g(u) - I\| \leq \frac{1}{2}\|u - I\|, \quad \forall u \in \overline{B}.} \tag{5.1}$$

Réponse

-***En déduisant que*** $\overline{B}$ ***est stable par l'application*** g.
Il s'agit de montrer que $g\left(\overline{B}\right) \subset \overline{B}$.
Soit $u \in \overline{B}$. *Alors d'après l'inégalité (5.1), on a*

$$\|g(u) - l\| \leq \frac{1}{2}\|u - l\| \leq \frac{r}{2} \leq r.$$

Donc $g(u) \in \overline{B}$. *D'où*

$$\boxed{g\left(\overline{B}\right) \subset \overline{B}.}$$

7) Soit $u_0 \in \overline{B}$ *et l'on définit par récurrence* $u_{n+1} = g(u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. ***Montrons que la suite*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge vers*** l.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie puisque* $\overline{B}$ *est stable par l'application* g.

Réponse

D'après l'inégalité (5.1), on a

$$\|u_{n+1} - l\| = \|g(u_n) - l\| \leq \frac{1}{2}\|u_n - l\|, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Donc par récurrence facile on a

$$\|u_n - l\| \leq \frac{1}{2^n}\|u_0 - l\|, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - l\| = 0$$

Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l.

Plan

Exercice 6

On munit $\mathbb{R}^2$ *de la norme euclidienne* $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. *On considère la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x,y) = \left(x - \frac{2}{3}\arctan y \, , \, y + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \right), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) *Montrer que la fonction* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et que* $Df(x,y) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ *pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2) *Montrer que la fonction* f *est une bijection de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.
3) *En déduire que* f *est un* C^1*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.
4) *Déterminer* $Df^{-1}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Réponse

1) Montrons que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que $Df(x,y) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses deux composantes

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x - \frac{2}{3}\arctan y \end{array}$$

et

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{array}$$

le sont. En effet, les dérivées partielles de f_1 et f_2 existent

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-2}{3\left(1+y^2\right)}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 1.$$

Réponse

1) Montrons que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que $Df(x,y) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses deux composantes

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x - \frac{2}{3}\arctan y \end{array}$$

et

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{array}$$

le sont. En effet, les dérivées partielles de f_1 et f_2 existent

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1 \qquad ; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-2}{3\left(1+y^2\right)}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} \qquad ; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 1.$$

Réponse

et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. *Le jacobien de f en chaque point* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$ *est égal*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-2}{3(1+y^2)} \\ \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} & 1 \end{vmatrix} = 1+\frac{x}{3\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}}$$

On a

$$\frac{|x|}{3\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{3} \times \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{1}{3}$$

(car $\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ *et* $\frac{1}{1+y^2} \leq 1$*). Il vient*

$$\frac{2}{3} \leq 1+\frac{x}{3\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{4}{3}.$$

Réponse

et sont continues sur $\mathbb{R}^2$*. Le jacobien de* f *en chaque point* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *est égal*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-2}{3\left(1+y^2\right)} \\ \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{x}{3\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}}$$

On a

$$\frac{|x|}{3\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{3} \times \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{1}{3}$$

(car $\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ *et* $\frac{1}{1+y^2} \leq 1$*). Il vient*

$$\frac{2}{3} \leq 1 + \frac{x}{3\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{4}{3}.$$

Réponse

et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. *Le jacobien de* f *en chaque point* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *est égal*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-2}{3\left(1+y^2\right)} \\ \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} & 1 \end{vmatrix} = 1+\frac{x}{3\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}}$$

On a

$$\frac{|x|}{3\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{3}\times\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1}{1+y^2}\leq\frac{1}{3}$$

(car $\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\leq 1$ *et* $\frac{1}{1+y^2}\leq 1$*). Il vient*

$$\frac{2}{3}\leq 1+\frac{x}{3\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}}\leq\frac{4}{3}.$$

Réponse

Donc

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'où

$$\boxed{Df(x,y) \in \mathrm{Isom}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

*2) **Montrons que la fonction** f **est une bijection de** $\mathbb{R}^2$ **sur** $\mathbb{R}^2$**.***
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ *donné. Montrons que l'équation*

$$\boxed{f(x,y) = (\alpha,\beta)} \tag{6.1}$$

admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

Réponse

Donc

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'où

$$\boxed{Df(x,y) \in \mathrm{Isom}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

2) ***Montrons que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.***
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ donné. Montrons que l'équation

$$\boxed{f(x,y) = (\alpha, \beta)} \tag{6.1}$$

admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

Réponse

Donc

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'où

$$\boxed{Df(x,y) \in \mathrm{Isom}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

2) Montrons que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ donné. Montrons que l'équation

$$\boxed{f(x,y) = (\alpha, \beta)} \tag{6.1}$$

admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

Réponse

Donc

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'où

$$\boxed{Df(x,y) \in \mathrm{Isom}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

2) ***Montrons que la fonction*** f ***est une bijection de*** $\mathbb{R}^2$ ***sur*** $\mathbb{R}^2$***.***
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *donné. Montrons que l'équation*

$$\boxed{f(x,y) = (\alpha, \beta)} \tag{6.1}$$

admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$*.*

Réponse

L'équation (6.1) est équivalente à

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}\arctan y = \alpha \\ y + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} = \beta \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} x = \alpha + \frac{2}{3}\arctan y \\ y = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

ou encore

$$\boxed{\varphi(x,y) = (x,y)}$$

avec φ est la fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\alpha + \frac{2}{3}\arctan y \ , \ \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right) \end{array}$$

Réponse

L'équation (6.1) est équivalente à

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}\arctan y = \alpha \\ y + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} = \beta \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} x = \alpha + \frac{2}{3}\arctan y \\ y = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

ou encore

$$\boxed{\varphi(x,y) = (x,y)}$$

avec φ est la fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\alpha + \frac{2}{3}\arctan y \;,\; \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right) \end{array}$$

Réponse

L'équation (6.1) est équivalente à

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}\arctan y = \alpha \\ y + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} = \beta \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} x = \alpha + \frac{2}{3}\arctan y \\ y = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

ou encore

$$\boxed{\varphi(x,y) = (x,y)}$$

avec φ est la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\alpha + \frac{2}{3}\arctan y \ , \ \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right) \end{array}$$

Réponse

Donc, un élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est solution de l'équation (6.1) si et seulement si (x, y) est un point fixe de φ.

La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et sa différentielle en chaque point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ est donné par sa matrice jacobienne :

$$J_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3(1+y^2)} \\ \frac{-x}{2\sqrt{1+x^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout (h, k) de $\mathbb{R}^2$ on a

$$D\varphi(x, y)(h, k) = \left(\frac{2k}{3\left(1 + y^2\right)}, \frac{-xh}{2\sqrt{1 + x^2}} \right)$$

Réponse

Donc, un élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est solution de l'équation (6.1) si et seulement si (x, y) est un point fixe de φ.
La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et sa différentielle en chaque point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ est donné par sa matrice jacobienne :

$$J_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3(1+y^2)} \\ \frac{-x}{2\sqrt{1+x^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout (h, k) de $\mathbb{R}^2$ on a

$$D\varphi(x,y)(h,k) = \left(\frac{2k}{3(1+y^2)}, \frac{-xh}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Réponse

Donc, un élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *est solution de l'équation (6.1) si et seulement si* (x, y) *est un point fixe de* φ.
La fonction φ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et sa différentielle en chaque point* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$ *est donné par sa matrice jacobienne :*

$$J_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3(1+y^2)} \\ \frac{-x}{2\sqrt{1+x^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout (h, k) *de* $\mathbb{R}^2$ *on a*

$$D\varphi(x, y)(h, k) = \left(\frac{2k}{3\left(1 + y^2\right)}, \frac{-xh}{2\sqrt{1 + x^2}} \right)$$

Réponse

Par suite,

$$\begin{aligned}
\|D\varphi(x,y)(h,k)\|_2^2 &= \left(\frac{2k}{3\left(1+y^2\right)}\right)^2 + \left(\frac{-xh}{2\sqrt{1+x^2}}\right)^2 \\
&= \frac{4}{9\left(1+y^2\right)^2}k^2 + \frac{x^2}{4\left(1+x^2\right)}h^2 \\
&\leq \frac{4}{9}k^2 + \frac{1}{4}h^2 \qquad \left(on\ a \quad \frac{1}{4} < \frac{4}{9}\right) \\
&\leq \frac{4}{9}\left(k^2+h^2\right) = \frac{4}{9}\|(h,k)\|_2^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\|D\varphi(x,y)(h,k)\|_2 \leq \frac{2}{3}\|(h,k)\|_2, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall (h,k)\in\mathbb{R}^2.$$

Réponse

Par suite,

$$
\begin{aligned}
\|D\varphi(x,y)(h,k)\|_2^2 &= \left(\frac{2k}{3\left(1+y^2\right)}\right)^2+\left(\frac{-xh}{2\sqrt{1+x^2}}\right)^2 \\
&= \frac{4}{9\left(1+y^2\right)^2}k^2+\frac{x^2}{4\left(1+x^2\right)}h^2 \\
&\leq \frac{4}{9}k^2+\frac{1}{4}h^2 \qquad \left(\textit{on a} \quad \frac{1}{4}<\frac{4}{9}\right) \\
&\leq \frac{4}{9}\left(k^2+h^2\right)=\frac{4}{9}\|(h,k)\|_2^2
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\|D\varphi(x,y)(h,k)\|_2 \leq \frac{2}{3}\|(h,k)\|_2, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall (h,k)\in\mathbb{R}^2.
$$

Réponse

D'où

$$\|D\varphi(x,y)\| \leq \frac{2}{3}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Sachant que $\mathbb{R}^2$ est **convexe** (car c'est un espace vectoriel). Donc d'après le théorème des accroissements finis on a :*

$$\boxed{\left\|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')\right\|_2 \leq \frac{2}{3}\left\|(x,y) - (x',y')\right\|_2} \qquad \begin{array}{l} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Cela montre que φ est contractante de rapport $\frac{2}{3} < 1$. Et comme $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ est complet, alors d'après le Théorème du point fixe, l'application φ admet un point et un seul. Autrement dit, l'équation (6.1) admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

Réponse

D'où

$$\|D\varphi(x,y)\| \leq \frac{2}{3}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Sachant que $\mathbb{R}^2$ est **convexe** (car c'est un espace vectoriel). Donc d'après le théorème des accroissements finis on a :*

$$\boxed{\left\|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')\right\|_2 \leq \frac{2}{3}\left\|(x,y) - (x',y')\right\|_2} \qquad \begin{array}{l} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Cela montre que φ est contractante de rapport $\frac{2}{3} < 1$. Et comme $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ est complet, alors d'après le Théorème du point fixe, l'application φ admet un point et un seul. Autrement dit, l'équation (6.1) admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

Réponse

D'où

$$\|D\varphi(x,y)\| \leq \frac{2}{3}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Sachant que $\mathbb{R}^2$ est **convexe** (car c'est un espace vectoriel). Donc d'après le théorème des accroissements finis on a :*

$$\boxed{\left\|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')\right\|_2 \leq \frac{2}{3}\left\|(x,y) - (x',y')\right\|_2} \qquad \begin{array}{l} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Cela montre que φ est contractante de rapport $\frac{2}{3} < 1$. Et comme $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ est complet, alors d'après le Théorème du point fixe, l'application φ admet un point et un seul. Autrement dit, l'équation (6.1) admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^2$.

Réponse

D'où

$$\boxed{\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \exists!\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f\,(x,y)=(\alpha,\beta)\,.}$$

Cela montre que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse

Autre méthode *: L'équation (6.1) est équivalente à*

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}\arctan y = \alpha \\ y + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} = \beta \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}\arctan y = \alpha \\ y = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

ou encore,

$$(S) \quad \begin{cases} x - \alpha - \frac{2}{3}\arctan\left(\beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right) = 0 \\ y = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

Réponse

Autre méthode *: L'équation (6.1) est équivalente à*

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}\arctan y = \alpha \\ y + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} = \beta \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}\arctan y = \alpha \\ y = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

ou encore,

$$(S) \quad \begin{cases} x - \alpha - \frac{2}{3}\arctan\left(\beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right) = 0 \\ y = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

Réponse

Autre méthode *: L'équation (6.1) est équivalente à*

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}\arctan y = \alpha \\ y + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} = \beta \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}\arctan y = \alpha \\ y = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

ou encore,

$$(S) \quad \begin{cases} x - \alpha - \frac{2}{3}\arctan\left(\beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right) = 0 \\ y = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

Réponse

Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \alpha - \frac{2}{3}\arctan\left(\beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right) \\ &= x - \alpha + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \beta\right). \end{aligned}$$

La fonction g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + \frac{2}{3} \times \frac{\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \beta\right)^2} \\ &= 1 + \frac{x}{3\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \beta\right)^2}. \end{aligned}$$

Réponse

Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \alpha - \frac{2}{3}\arctan\left(\beta - \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right) \\ &= x - \alpha + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \beta\right). \end{aligned}$$

La fonction g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + \frac{2}{3} \times \frac{\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \beta\right)^2} \\ &= 1 + \frac{x}{3\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \beta\right)^2}. \end{aligned}$$

Réponse

Or

$$\frac{|x|}{3\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}-\beta\right)^2} \leq \frac{1}{3}$$

alors

$$\frac{2}{3} \leq 1 + \frac{x}{3\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}-\beta\right)^2} \leq \frac{4}{3}$$

Donc,

$$g'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

*Cela montre que la fonction g est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.*
D'autre part, puisque

$$\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2},$$

Réponse

Or

$$\frac{|x|}{3\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}-\beta\right)^2} \leq \frac{1}{3}$$

alors

$$\frac{2}{3} \leq 1 + \frac{x}{3\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}-\beta\right)^2} \leq \frac{4}{3}$$

Donc,

$$g'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cela montre que la fonction g est ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}$.
D'autre part, puisque

$$\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2},$$

Réponse

Or

$$\frac{|x|}{3\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}-\beta\right)^2} \leq \frac{1}{3}$$

alors

$$\frac{2}{3} \leq 1 + \frac{x}{3\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}-\beta\right)^2} \leq \frac{4}{3}$$

Donc,

$$g'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cela montre que la fonction g est ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}$.

D'autre part, puisque

$$\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2},$$

Réponse

Or

$$\frac{|x|}{3\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}-\beta\right)^2} \leq \frac{1}{3}$$

alors

$$\frac{2}{3} \leq 1+\frac{x}{3\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}-\beta\right)^2} \leq \frac{4}{3}$$

Donc,

$$g'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cela montre que la fonction g est ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}$.
D'autre part, puisque

$$\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2},$$

Réponse

alors

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \alpha + \arctan(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \beta) \right) = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x - \alpha + \arctan(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \beta) \right) = -\infty$$

On en déduit, en appliquant le Théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue g, qu'il existe ***un unique*** $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $g(x_0) = 0$ *(le* x_0 *est* ***unique*** *car la fonction g est* ***strictement croissante, donc injective****).*

Réponse

alors

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \alpha + \arctan(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \beta) \right) = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x - \alpha + \arctan(\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} - \beta) \right) = -\infty$$

*On en déduit, en appliquant le Théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue g, qu'il existe **un unique** $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$ (le x_0 est **unique** car la fonction g est **strictement croissante, donc injective**).*

Réponse

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$g(x)$					$+\infty$
			0	$\nearrow$	
	$-\infty$	$\nearrow$			

Posons alors $y_0 = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1 + x_0^2}$. *Donc le couple* (x_0, y_0) *est l'unique solution du système* (S) *dans* $\mathbb{R}^2$. *Autrement dit,* (x_0, y_0) *est l'unique solution de l'équation (6.1) dans* $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \exists! (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_0, y_0) = (\alpha, \beta).}$$

Par conséquent f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Réponse

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Posons alors $y_0 = \beta - \frac{1}{2}\sqrt{1 + x_0^2}$. *Donc le couple* (x_0, y_0) *est l'unique solution du système* (S) *dans* $\mathbb{R}^2$. *Autrement dit,* (x_0, y_0) *est l'unique solution de l'équation (6.1) dans* $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \exists! \, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_0, y_0) = (\alpha, \beta) \, .}$$

Par conséquent f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Réponse

3) ***En déduisant que*** f ***est un*** C^1***-difféomorphisme de*** $\mathbb{R}^2$ ***sur*** $\mathbb{R}^2$***.***

D'après les questions 1) et 2), on a

i) f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *;*

ii) *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $Df(x, y) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ *;*

iii) f *est une bijection de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$*.*

Donc d'après le théorème d'inversion globale, l'application f *est un* C^1-*difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $f\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$*.*

Réponse

3) ***En déduisant que*** f ***est un*** C^1***-difféomorphisme de*** $\mathbb{R}^2$ ***sur*** $\mathbb{R}^2$***.***

D'après les questions 1) et 2), on a

i) f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *;*

ii) *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $Df(x, y) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ *;*

iii) f *est une bijection de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

Donc d'après le théorème d'inversion globale, l'application f *est un* C^1-*difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $f\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$.

Réponse

4) ***Déterminons*** $Df^{-1}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Puisque f *est un* C^1-*difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$, *alors pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\boxed{Df^{-1}\left(f(x, y)\right) = \left[Df(x, y)\right]^{-1}.}$$

Or $f(0, 0) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. *Donc* $Df^{-1}(0, \frac{1}{2}) = \left[Df(0, 0)\right]^{-1}$.

Par suite, la matrice jacobienne de f^{-1} *au point* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ *est*

$$J_{f^{-1}}(0, \frac{1}{2}) = \left[J_f(0; 0)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse

4) ***Déterminons*** $Df^{-1}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Puisque f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\boxed{Df^{-1}\left(f(x,y)\right) = \left[Df(x,y)\right]^{-1}.}$$

Or $f(0,0) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Donc $Df^{-1}(0, \frac{1}{2}) = \left[Df(0,0)\right]^{-1}$.

Par suite, la matrice jacobienne de f^{-1} au point $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est

$$J_{f^{-1}}(0, \frac{1}{2}) = \left[J_f(0;0)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse

4) ***Déterminons*** *$Df^{-1}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.*
Puisque f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\boxed{Df^{-1}\left(f\left(x, y\right)\right) = \left[Df(x, y)\right]^{-1}.}$$

Or $f\left(0, 0\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Donc $Df^{-1}(0, \frac{1}{2}) = \left[Df(0, 0)\right]^{-1}$.
Par suite, la matrice jacobienne de f^{-1} au point $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est

$$J_{f^{-1}}(0, \frac{1}{2}) = \left[J_f\left(0; 0\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse

Par conséquent,

$$\boxed{Df^{-1}(0, \frac{1}{2})\,(h, k) = (h + \frac{2}{3}k, k)} \quad \forall\,(h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Fin

Plan

Note 1

Théorème (formule de Taylor avec reste de Lagrange)

Soit $f : U \longrightarrow F$ une application d'un ouvert U d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F. On suppose que l'application $f : U \longrightarrow F$ est $n+1$ fois différentiable dans U ; Supposons qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que

$$\left\| D^{n+1} f(x) \right\| \leq M, \text{ pour tout } x \in U.$$

Soient $a \in U$ et $h \in E$ tel que le segment $[a, a+h]$ soit contenu dans U. Alors

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot (h)^k \right\| \leq \frac{M \left\| h \right\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $a \in U$ et $b \in U$ tel que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U, on a

$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot (b-a)^k \right\| \leq \frac{M \|b-a\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(En effet, il suffit de faire le changement de variable $b = a + h$)

Théorème (Cas d'une fonction de la variable réelle ($E = R$))

*Soit $f : I \longrightarrow F$ une application d'un **intervalle ouvert** I de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé F. On suppose que l'application $f : I \longrightarrow F$ est $n+1$ fois dérivable dans I ; Supposons qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que*

$$\left\| f^{(n+1)}(x) \right\| \leq M, \text{ pour tout } x \in I.$$

Pour tous $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $(a+h) \in I$, on a

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} h^k f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{M \; |h|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $a \in I$ et $b \in I$, on a

$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(b-a)^k \, f^{(k)}\,(a) \right\| \leq \frac{M\ |b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(En effet, il suffit de faire le changement de variable $b = a + h$)

Cas particulier

Soit $f : I \longrightarrow F$ une application 2 fois dérivable dans I; Supposons qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que

$$\left\|f''(x)\right\| \leq M, \text{ pour tout } x \in I.$$

Pour $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $(a+h) \in I$, on a

$$\left\|f(a+h) - f(a) - hf'(a)\right\| \leq \frac{M\, h^2}{2!}.$$

De même, pour $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $(a-h) \in I$, on a

$$\left\|f(a-h) - f(a) + hf'(a)\right\| \leq \frac{M\, h^2}{2!}.$$

Retour.

Note 2

Soient u et v deux vecteur d'un espace vectoriel normé E, et soit M un réel positif. Si $\|u+v\| \leq M$ alors

$$\|u\| \leq M + \|v\| \, .$$

En effet, d'après l'inégalité triangulaire on a

$$\|u\| = \|(u+v)+(-v)\| \leq \|u+v\| + \|v\| \leq M + \|v\| \, .$$

En échangeant les rôles de u et v, on a aussi :

$$\|v\| \leq M + \|u\| \, .$$

Retour.