corrigé d'examen @TOuanzi_2020

Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2020-2021
Filière : MIP
Module : M 124 Algèbre 2

EXAMEN D'ALGÈBRE - SESSION NORMALE (30 Juin 2021)

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 1h30.
Les documents, calculatrices et matériels électroniques non autorisés.

Exercice 1 : (5 pts)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in L(E)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ (où 0 est l'endomorphisme nul de l'espace vectoriel E).

1) Montrer qu'il existe un vecteur $u \in E$, non nul tel que $B = \{u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{p-1}(u)\}$ soit une famille libre.
2) En déduire que si $\dim E = p$ alors B est une base de E.
3) Justifier pourquoi $m_f(X) = X^p$ est le polynôme minimal de l'endomorphisme f.

Exercice 2 : (10 pts)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le rang de A.
2) a) Calculer le polynôme caractéristique de f.
   b) En déduire que $sp(f) = \{1, 2\}$.
3) a) Déterminer les sous espaces propres de f.
   b) f est-il diagonalisable ?
4) Soit P la matrice de colonnes $u = (3,2,4)$, $v = (0,1,0)$ et $w = (-2,-2,-3)$.
   a) Calculer P^2. En déduire que P est inversible et donner P^{-1} (sans calcul).
   b) En déduire que $B = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5) Montrer que la famille $B = \{u, v, w\}$ est formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f par rapport à la base B.
6) Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : (5 pts)

On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique q définie par :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

1) Trouver la matrice M et la forme polaire φ de la forme quadratique q.

$(x_1-x_3)^2-x_3^2$

2) Trouver la signature de la forme quadratique q, en utilisant la méthode de Gauss. $S=(1,2)$

3) Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont vraies. Justifier votre choix.

V - le rang de q est $rang(q) = 3$.
X - ~~q est dégénérée~~.
V - q n'est ni positive ni négative.
X - le rang de q est $rang(q) = 2$.
V - q est non dégénérée.
X - q est définie positive.

4) Déterminer une base orthogonale B' de q et donner la matrice M' de q dans cette base.

EX 1 examen 20 - 21

1) soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \cdots \lambda_p \in R$

on a

$$\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \lambda_3 f^2(u) + \cdots + \lambda_p f^{p-1}(u) = 0$$

on appliquons f sur l'égalité

$$f\left(\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \cdots + \lambda_p f^{p-1}(u)\right) = f(0)$$

$$\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) + \cdots \lambda_{p-1} f^{p-1}(u) = 0$$

car $f^p(u) = 0$

$\Rightarrow$ on appliquons f encore

$$\lambda_1 f^2(u) + \lambda_2 f^3(u) + \cdots + \lambda_{p-2} f^{p-1}(u) = 0$$

* encore

$$\lambda_1 f^3(u) + \lambda_2 f^4(u) + \cdots + \lambda_{p-3} f^{p-1}(u) = 0$$

* encore

$$\lambda_1 f^4(u) + \lambda_2 f^5(u) + \cdots + \lambda_{p-4} f^{p-1}(u)$$

Scanned by TapScanner

On commençons de cette façon jusqu'à obtenons

$\lambda_1 f^{p-1}(u) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ car $f^{p-1}(u) \neq 0$

~~Alors~~ on a $\circledast$

$\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \cdots + \lambda_p f^{p-1}(u) = 0$

Alors on $\lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 f(u) + \lambda_3 f^2(u) + \cdots + \lambda_p f^{p-1}(u) = 0$

~~on~~ de même façon on appliquons f

$\lambda_2 f^2(u) + \lambda_3 f^3(u) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(u) = 0$

encore de même façon

⋮

Jusqu'à obtient

$\lambda_2 f^{p-1}(u) = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0$ car $f^{p-1}(u) = 0$

Alors encore on remplacons $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ dans $\circledast$

on optient

$\lambda_3 f^2(u) + \lambda_4 f^3(u) + \cdots + \lambda_p f^{p-1}(u) = 0$

on appliqons f encore

et on obtien

$\lambda_3 f^{p-1}(u) = 0$

$\Rightarrow \lambda_3 = 0$

Scanned by TapScanner

de même façons jusqu'à obtenir

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots \lambda_p = 0$$

Alors ~~la famo~~

$\exists\, u \in E$ tedque la famille

$$B = \{u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{p-1}(u)\}$$

est libre

2) on a

$$\begin{cases} \text{card}(B) = p \\ \text{et } B \text{ est libre} \end{cases}$$

il suffit ~~de~~ que $\dim E = p$

pour B soit une base de E

3) on a f est endomorfist nilpotent d'ordre $P \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

telque $1 \leq n < P$

$\Rightarrow f^n(u) \neq 0$

est $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$
telque

$P \leq n \Longrightarrow f^n(u) = 0$

Alors X^P est le polynome minimal de f

$\cancel{X^P}$ $f^P = 0$

EX 2

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

1) on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -12 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -70 + 72$$

$$= 2 \neq 0$$

Alors rang de $A = 3$

$rg(A) = 3$

2)

a)

$C_f(f) \Leftrightarrow \det(A - XI_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -7-X & 0 & 6 \\ -8 & 1-X & 6 \\ -12 & 0 & 10-X \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (1-X)\begin{vmatrix} -7-X & 6 \\ -12 & 10-X \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (1-X)\left((-7-X)(-X+10)+72\right)$$

$$\Leftrightarrow (1-X)(X^2-3X+2)$$

$$C_f(f) = (1-X)^2(2-X)$$

b) les valeurs propre de f sont

$C_f(f) = 0 \Leftrightarrow (1-X)^2(2-X)$

$\Leftrightarrow$ les valeurs propre sont (1, 2

$\Leftrightarrow SP(f) = \{1, 2\}$

Scanned by TapScanner

3) on a

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow Ker(A - I_3)$

$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 6 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} -8x + 6z = 0 \\ -12x + 9z = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} z = \frac{4}{3} x \end{cases}$

$\Longleftrightarrow E_1 = \{ (x, y, \frac{4}{3} x) / x, y \in \mathbb{R} \}$
$= \{ x(1, 0, 4/3) + y(0,1,0) / x, y \in \mathbb{R} \}$
$= \{ x(3, 0, 4) + y(0,1,0) \ldots$

$\Longleftrightarrow E_1 = \text{Vect}((3,0,4), (0,1,0))$

* $E_2 =$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Longleftrightarrow Ker(A - 2I_3)$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 0 & 6 \\ -8 & -1 & 6 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} -9x + 6z = 0 \\ -8x - y + 6z = 0 \\ -12x + 8z = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2} x \\ x = y \end{cases}$

$E_2 = \{ (x, x, 3/2\, x) / x \in \mathbb{R} \}$
$= \{ x(1, 1, 3/2) / x \in \mathbb{R}$
$= \{ x(2, 2, 3) / x \in \mathbb{R}$

$E_2 = \text{Vect}((2, 2, 3))$

b) on a

$\begin{cases} \dim E_1 = 2 = \text{multiplicité de } 1 \\ \dim E_2 = 1 = \text{multiplicité de } 2 \\ \dim E = 3 = \dim E_1 + \dim E_2 \end{cases}$

et $C_0(f)$ est scindé

Alors f est diagonalisable

Scanned by TapScanner

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a)

$$P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a $P . P = I_3$

$\Rightarrow \det(P) . \det(P) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ P est inversible

on a $P . P = I_3$

$\Rightarrow P^{-1} = P$

b)

on a

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -9 + 8$$

$$= 1 \neq 0$$

Alors (u, v, w) est libre

et $\operatorname{card} B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Alors B est une base de $\mathbb{R}^3$

On a

$B = (u, v, w)$ une base de $\mathbb{R}^3$

On a

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ la matrice de passage de Base canonique à B

$$P^{-1} = P$$

$\Rightarrow$ la matrice D par rapport à Base B est

$$D_B = P^{-1} . A . P$$
$$= P . A . P$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6) On a

$$D_B = P . A . P$$
$$\Rightarrow A = P . D_B . P$$
$$\Rightarrow A^n = P . D_B . \underbrace{P \times P}_{I_3} . D_B . \underbrace{P \times}_{I_3} \cdots \times P . D_B . P$$
$$A^n = P . D_B^n . P$$
$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 9-2^{n+3} & 0 & -6+3\times 2^{n+1} \\ 8-2^{n+3} & 1 & -6+3\times 2^{n+1} \\ 12-3\times 2^{n+3} & 0 & -8+9\times 2^{n} \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

Exercice 3 : Exam 20-21

1) -

$$M_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

2) $x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) - x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

$(x_1 + x_2 - x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

$(x_1 + x_2 - x_3)^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - \cancel{x_3^2} - x_2^2 + \cancel{x_3^2} + 2x_2x_3$

$(x_1 + x_2 - x_3)^2 - 2(x_2^2 - 2x_2x_3)$

$$= \boxed{(x_1 + x_2 - x_3)^2 - 2(x_2 - x_3)^2 + 2x_3^2}$$

* la signature $S = (1, 2)$
non dégénérée

* la signature $s=(1,2)$
non dégénérée

* le rang de q est $rg = 3$
* q est ni positive ni négative
* q est non dégénérée

4) soit (α, β, γ) une base ortogonale

$$\begin{cases} \alpha = x_1 + x_2 - x_3 \\ \beta = x_2 - x_3 \\ \gamma = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha - \beta \\ x_2 = \beta + \gamma \\ x_3 = \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Base ortogonale de q est

$$B = ((1,0,0), (-1,1,0), (0,1,1))$$

$$M' = {}^tP \cdot M_q \cdot P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

by Touanzi_2020

Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2019-2020
Filière : MIP
Module : M 124 Algèbre 2

EXAMEN D'ALGÈBRE - SESSION NORMALE (09 Janvier 2020)

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 1h30.
Les documents, calculatrices et matériels électroniques non autorisés.

Exercice 1 : (5 pts)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 en fonction de A et de I_2, où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

2) Montrer que pour tout $M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $MA^2 = A^2M \Leftrightarrow MA = AM$.

3) Calculer A^8.

Exercice 2 : (8 pts)

Soit la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$, où $m \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer les valeurs propres de A_m et les sous espaces propres associés.

2) a) Montrer que A_m est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer une matrice inversible $P \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $D_m = P^{-1}A_mP$ soit diagonale.

3) Calculer $(A_{-2})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4 Soient les suites réelles (x_n), (y_n) et (z_n) définies par les relations :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -2y_n \\ y_{n+1} = -2y_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n - z_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } x_0 = 1, y_0 = 1 \text{ et } z_0 = -1.$$

On note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $U_n = (A_{-2})^n U_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 3 : (7 pts)

Soit q_n la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q_n(x) = x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

avec $n \geq 3$.

1) Donner la matrice de q_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   On prendra dans toute la suite $n = 3$, et on écrira $q = q_3$.

2) Vérifier que, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

3) Réduire, en utilisant la méthode de Gauss, la forme quadratique q.

4) En déduire le rang et la signature de q.

5) Déterminer une base orthogonale de q.

6) Écrire la matrice de q dans cette base.

Exam 19 — 20

Ex 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= A + I_2$$

$$\Rightarrow \boxed{A^2 = A + I_2}$$

2)- soit $M \in M_2(\mathbb{R})$

telq $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

on a

$$MA^2 = A^2 M$$

$$\Leftrightarrow M \cdot (A + I_2) = (A + I_2) \cdot M$$

$$\Leftrightarrow MA + \cancel{M} = AM + \cancel{M}$$

$$\Leftrightarrow MA = AM$$

doù

Pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$ on a

$$MA^2 = A^2 M \Leftrightarrow MA = AM$$

Scanned by TapScanner

3) on a

$$A^8 = (A^2)^4$$
$$= (A+I_2)^4$$
$$= \sum_{k=0}^{4} C_4^k I_2^k A^{(n-k)}$$

$$= A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + I_2$$
$$= (A+I_2)^2 + 4A.(A+I_2) + 6(A+I_2) + 4A + I_2$$
$$= A^2 + 2A + I_2 + 4A^2 + 4A + 6A + 6I_2 + 4A + I_2$$
$$= 5A^2 + 16A + 8I_2$$
$$= 5(A+I_2) + 16A + 8I_2$$
$$= 5A + 5I_2 + 16A + 8I_2$$
$$= 21A + 13I_2$$
$$= \begin{pmatrix} 21 & 21 \\ 21 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{pmatrix}$$

Ex2)

1) on a

$$C_p(f_m) = \det(A_m - X I_3)$$

$$= \begin{vmatrix} m+2-X & -2 & 0 \\ 0 & m-X & 0 \\ 1 & -1 & m+1-X \end{vmatrix}$$

$$= (m-X+1)\big((m+2-X)(m-X)\big)$$

= les valeurs propres A_m sont

$$C_p(f_m) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = m+1 \\ \lambda_2 = m+2 \\ \lambda_3 = m \end{cases}$$

avec $m \neq -1$
$m \neq -2$
$m \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1} \iff \operatorname{Ker}(A_m - \lambda_1 I)$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$E_{\lambda_1} = \{(0,0,z) \,/\, z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{z(0,0,1) \,/\, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_1} = \operatorname{vect}((0,0,1))$$

Scanned by TapScanner

$$* \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow Ker(A_m - \lambda_2 I_3)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow E_{\lambda_2} = \{ (x, 0, x) / x \in R \}$$

$$= \{ x (1, 0, 1) / x \in R \}$$

$$\Leftrightarrow E_{\lambda_2} = vect\left((1, 0, 1) \right)$$

*

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3} \Leftrightarrow Ker(A_m - \lambda_3 I_3)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow E_{\lambda_3} = \{(x, x, 0) / x \in R\}$

$= \{x.(1, 1, 0) / x \in R)$

$\Leftrightarrow E_{\lambda_3} = Vect((1, 1, 0))$

2) - a)

on a

$\begin{cases} \dim E_{\lambda_1} = 1 = \text{multiplicité de } \lambda_1 \\ \dim E_{\lambda_2} = 1 = \text{ '' '' } \lambda_2 \\ \dim E_{\lambda_3} = 1 = \text{ '' '' } \lambda_3 \end{cases}$

et on a $\dim E = 3 = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \dim E_{\lambda_3}$

est on a C_f est scindé

Alors A_m est diagonalisable

2) -b)

soit P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs des base de les sous-espa propres des valeurs propre

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_m = P^{-1} . A_m . P$$

$$= \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 0 & m+2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

3)

On a

$$D_m = P^{-1} . A_m . P$$

$$\Longrightarrow \quad A_m = P . D_m . P^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (A_m)^n = (P . D_m . P^{-1})^n$$

$$= P . D_m^n . P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (m+1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (m+2)^n & 0 \\ 0 & 0 & m^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (m+2)^n & m^n \\ 0 & 0 & m^n \\ (m+1)^n & (m+2)^n & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_m)^n = \begin{pmatrix} (m+2)^n & m^n - (m+2)^n & 0 \\ 0 & m^n & 0 \\ (m+2)^n - (m+1)^n & (m+1)^n - (m+2)^n & (m+1)^n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A_m^n = \begin{pmatrix} (m+2)^n & m^n - (m+2)^n & 0 \\ 0 & m^n & 0 \\ (m+2)^n - (m+1)^n & (m+1)^n - (m+2)^n & (m+1)^n \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

$$\Rightarrow A_m^n = \begin{pmatrix} (m+2)^n & m^n-(m+2)^n & 0 \\ 0 & m^n & 0 \\ (m+2)^n-(m+1)^n & (m+1)^n-(m+2)^n & (m+1)^n \end{pmatrix}$$

Alors $A_{-2}^n =$

$$(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 0 & -2^n & 0 \\ 0 & -2^n & 0 \\ -(-1)^n & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \in N^*$

4)-a)

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$U_{n+1} = A_{-2} \cdot U_n$$

Alors

$$U_n = A_{-2} \cdot U_{n-1} \quad (1)$$
$$U_{n-1} = A_{-2} \cdot U_{n-2} \quad (2)$$
$$\vdots = \vdots \quad \vdots$$
$$U_1 = A_{-2} \cdot U_0 \quad (n)$$

on multiplions les égalité
$(1) \times (2) \times (3) \times \dots (n)$
et on simplifions
on obtient

$$U_n = A_{-2}^{(n-1+1)} \cdot U_0$$
$$= (A_{-2})^n \cdot U_0$$

$\Rightarrow \forall n \in N^*$

$$\boxed{U_n = (A_{-2})^n \cdot U_0}$$

4-b)

on a $U_n = (A_{-2})^n \cdot U_0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ -(-1)^n & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = (-2)^n \\ y_n = (-2)^n \\ z_n = -(-1)^n + (-1)^n - (-1)^n \end{cases}$$

Exercice 3

1) la matrice de q_n dans la base canonique

$$M_{q_n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & 1 & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 2 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & & & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

on a

$$q_3(x) = x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{2} x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le 3} x_i x_j$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Alors est vrai

$$\boxed{q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3}$$

3) on a

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + 2x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - \cancel{2x_2x_3} - x_3^2 + 2x_2^2 + \cancel{2x_2x_3}$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2$$

4) on a

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2$$

$\Rightarrow$ rang$(q) = 3$

signature de q est

$$S = (2, 1)$$

$\Rightarrow$ q est non dégénérée

$\Rightarrow$ q est ni positive ni négative

2
1
0

0
0
1

Scanned by TapScanner

5) ~~...~~ Posons

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \gamma \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha - \beta - \gamma \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \gamma \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ la base orthogonale de q est :

$$B = \{ (1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1) \}$$

6)

$$D_B = {}^tP \cdot M \cdot P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2018-2019
Filière : MIP
Module : M 124

EXAMEN D'ALGÈBRE - SESSION NORMALE (DÉCEMBRE 2018)

Durée : 1h30

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 1h30. Les documents, calculatrices et matériels électroniques non autorisés.

Exercice 1 : (4 pts)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n.

Exercice 2 : (10 pts)

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) les suites définies par :

$$\forall n \geq 0, \ \ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}, \ \ v_{n+1} = 3v_n + 2w_n \ \text{ et } \ w_{n+1} = v_n + 2w_n.$$

On suppose que $u_0 \geq 0$, $v_0 = u_0$ et $w_0 = 1$.

1) Montrer que, $\forall n \geq 0$, $u_n = \dfrac{v_n}{w_n}$.

2) a) Trouver une matrice A, telle que

$$\forall n \geq 0, \ \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

b) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D, telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

c) Calculer A^n et en déduire v_n, w_n et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Scanned by TapScanner

Exercice 3 : (6 pts)

1) Décomposer en somme de carrés de formes linéairement indépendantes la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{3\,4}$ suivante :

$$q(x,y,z,t) = y^2 + z^2 - 4xz - 4xt + 2yz.$$

Quelle est sa signature et son rang ?

2) Soit φ une application bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E, et soit Q sa forme quadratique. Soient $f_1, \dots, f_r$ des formes linéaires indépendantes, telles que Q s'écrive sous la forme :

$$\forall x \in E, \;\; Q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (f_i(x))^2,$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, r$.

a) Rappeler la définition du noyau d'une forme bilinéaire symétrique.

b) Vérifier que la forme bilinéaire symétrique φ associée à Q est donnée par :

$$\forall x,y \in E, \;\; \varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(x) f_i(y).$$

Scanned by TapScanner

Exam · 18—19

Ex 1

soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Posons $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

calculons

$MN = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= 2M$

* $NM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= 2M$

Alors $MN = NM = 2M$

calculons

$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors $\forall\ p \in \mathbb{N}^*\ M^p = 0$
$(p \geq 3$

On a $A = (M+N)$

$\Leftrightarrow A^n = (M+N)^n$

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k M^k N^{n-k}$

Scanned by TapScanner

On a

$$A = (M+N)$$

$$A^n = (M+N)^n$$

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} C_n^k M^k N^{n-k}$$

$$= N^n + nMN^{n-1} + C_n^2 M^2 N^{n-2}$$

$$= N^n + nMN^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} M^2 N^{n-2}$$

$$= N^n + n2^{n-1} M + \frac{2^{n-2}(n(n-1)}{2} M^2$$

$$= N^n + n2^{n-1} M + 2^{n-3}(n(n-1) M^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^{n-3}(n(n-1)) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 2^{n-3}(n^2-n) \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

Exercice 2

1) résunement par récurence

Pour $n = 0$

on a $U_0 = \frac{V_0}{W_0} = \frac{V_0}{1} = V_0$

est vrai

Alors on supposont

$U_n = \frac{V_n}{W_n}$ Montronsque

M.q $U_{n+1} = \frac{V_{n+1}}{W_{n+1}}$

on a $U_n = \frac{V_n}{W_n}$

$3U_n = \frac{3V_n}{W_n}$

* $3U_n + 2 = \frac{3V_n}{W_n} + 2$

$= \frac{3V_n + 2W_n}{W_n}$

on a $U_n = \frac{V_n}{W_n}$

$U_n + 2 = \frac{V_n}{W_n} + 2$

$= \frac{V_n + 2W_n}{W_n}$

$\Rightarrow \frac{1}{U_n+2} = \frac{W_n}{V_n + 2W_n}$

$3U_n + 2 \times \frac{1}{U_n+2} = \frac{3V_n + 2W_n}{V_n + 2W_n} = \frac{V_{n+1}}{W_{n+1}}$

Scanned by TapScanner

$$U_{n+1} = \frac{V_{n+1}}{W_{n+1}}$$

lors $\forall n \geqslant 0$ $U_n = \frac{V_n}{W_n}$

on a

$$\begin{cases} V_{n+1} = 3V_n + 2W_n \\ W_{n+1} = V_n + 2W_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

2) b

Posons f endomorphisme dont sa matrice est A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C_f(\delta) = \det(A - XI_2)$$
$$= \begin{vmatrix} 3-\cancel{X} & 2 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix}$$
$$= (3-X)(2-X)-2$$
$$= 6 - 3\cancel{X} - 2X + X^2 - 2$$
$$= X^2 - 5X + 4$$

les valeur propre de f sont

$$C_f(\delta) = 0 \Leftrightarrow X^2 - 5X + 4 = 0$$
$$\Delta = 25 - 16 = 9$$
$$\lambda_1 = \frac{5-3}{2} = 1$$
$$\lambda_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

les valeurs propres de f sont $\{1, 4\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A - I_2)$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x + y = 0 \end{cases}$$
$$E_1 = \{(x, -x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x \times (1, -1) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$$
$$E_1 = \operatorname{Vect}((1, -1))$$

Scanned by TapScanner

Scanned by TapScanner

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_4 \Leftrightarrow Ker(A - 4I_2)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \{ x = 2y$$

$$E_4 = \{ (2y, y) / y \in R \}$$

$$= \{ y(2, 1) / y \in R \}$$

$$E_4 = vect((2, 1))$$

Alors la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ \frac{1}{3} & 1/3 \end{pmatrix}$$

Alors

$$D = P^{-1}.A.P$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{cases} P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Scanned by TapScanner

On a

$$A = P.D.P^{-1}$$

$$A^n = (P.D.P^{-1})^n$$

$$= P.D.\underbrace{P^{-1} \times P}_{I_2}.D\underbrace{P^{-1} \ldots P}_{I_2}.D.P^{-1}$$

$$= P.D^n.P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2\times 4^n \\ -1 & 4^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+2\times 4^n}{3} & \frac{-2+2\times 4^n}{3} \\ \frac{-1+4^n}{3} & \frac{2+4^n}{3} \end{pmatrix}.$$

Posons $Z_n = \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

On a $Z_{n+1} = A . Z_n$

$\forall n \in N^*$

Alors

$$Z_n = A . Z_{n-1} \quad (1)$$

$$Z_{n-1} = A . Z_{n-2} \quad (2)$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots \quad \vdots$$

$$Z_1 = A . Z_0 \quad (n)$$

on multiplions l'égalité

(1) × (2) × ... × (n)

on obtient

$$Z_n = A^n . Z_0 \quad .$$

Scanned by TapScanner

$$\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\times4^n}{3} & -\frac{2+2\times4^n}{3} \\ \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n+2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} V_n = \dfrac{(1+2\times4^n)V_0 - 2 + 2\times4^n}{3} \\ W_n = \dfrac{(4^n-1)V_0 + 4^n + 2}{3} \end{cases}$$

on a

$$U_n = \frac{V_n}{W_n}$$

$\Leftrightarrow$

$$U_n = \frac{(1+2\times4^n)U_0 + 2\times4^n - 2}{(4^n-1)U_0 + 4^n + 2}$$

$$U_n = \frac{4^n\left(2U_0 + \frac{U_0}{4^n} - \frac{2}{(4^n)} + 2\right)}{4^n\left(U_0 - \frac{U_0}{4^n} + \frac{2}{4^n} + 1\right)}$$

$$= \frac{2U_0 + \frac{U_0}{(4^n)} - \frac{2}{(4^n)} + 2}{U_0 - \frac{U_0}{4^n} + \frac{2}{4^n} + 1}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{2U_0 + \frac{U_0}{4^n} - \frac{2}{4^n} + 2}{U_0 + \frac{2-U_0}{4^n} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{+\infty} U_n = \frac{2U_0 + 2}{U_0 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{+\infty} U_n = \frac{2(U_0+1)}{U_0+1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{+\infty} U_n = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = 2$$

Scanned by TapScanner

Exercice 3)

1) on a

$$q(x,y,z,t) = y^2+z^2-4xz-4xt+2yz$$

$$\Rightarrow q(x,y,z,t) = z^2+2z(y-2x)+y^2-4xt$$

$$=(z+y-2x)^2-(y-2x)^2+y^2-4xt$$

$$=(z+y-2x)^2-\cancel{y^2}+4xy-4x^2+\cancel{y^2}-4xt$$

$$=(z+y-2x)^2-\left[4x^2-4x(t-y)\right]$$

$$=(z+y-2x)^2-(2x-t+y)^2+(t-y)^2$$

Alors

* rang de q est

$$rg(q) = 3$$

* sa signature

$$S=(2,1)$$

$\Rightarrow$ q dégénère

$\Rightarrow$ q ni positive ni négati

Scanned by TapScanner

2)

a) le noyau d'une forme bilinéaire

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{ x \in E \,/\, \forall y \in E : \varphi(x, y) = 0 \}$$

b) on a matrice de Q

$$M_{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & \lambda_n \\ 0 & \cdots & & & & & \end{pmatrix} \text{ d'ordre } n$$

$$\varphi = (f_1(x), f_2(x) \cdots f_n(x)) \cdot M_{Q} \cdot \begin{pmatrix} f_1(y) \\ f_2(y) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(y) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) f_i(y)$$

Scanned by TapScanner

Scanned by TapScanner

Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2018-2019
Filière : MIP
Module : M 124

EXAMEN D'ALGÈBRE - SESSION DE RATTRAPAGE (JANVIER 2019)

Durée : 1h30

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 1h30 heures. Les documents, calculatrices et matériels électroniques non autorisés.

Exercice 1 : (6 pts)

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables.

1) Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est inversible, alors l'autre aussi.

2) Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est nilpotente (c'est-à-dire il existe un entier n tel que $A^n = 0$), alors l'autre aussi.

3) Montrer que si $B = \lambda I_n$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), alors $A = B$.

Exercice 2 : (8 pts)

On note $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on définit les vecteurs :

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ f_2 = e_1 + e_2 - 2e_3 \text{ et } f_3 = e_1 - e_3.$$

1) Vérifier que $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ ($x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$) un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Calculer ses coordonnées dans la base $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$.

3) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice D de f dans la base B'.

4) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice D^n. En déduire la matrice A^n.

Scanned by TapScanner

Exercice 3 : (6 pts)

a) Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) En déduire que le système suivant est de Cramer :

$$(S) \quad \begin{cases} 3x+2y-z=2 \\ 2x+2y+z=1 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$$

c) Donner la solution du système (S).

d) Inverser la matrice A.

e) Retrouver le résultat de $c)$ en utilisant $d)$.

Scanned by TapScanner

Exam 18—19

Ex 1

1) on a A et B deux matrices semblables

$\Rightarrow \det(A) = \det(B)$

si A est inversible

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\Rightarrow \det(A) = \det(B) \neq 0$

$\Rightarrow$ B est inversible

2) si A est nilpotent d'ordre p

$\Rightarrow n \geq p \quad A^n = 0$

A et B sembl

$\Rightarrow \det(A^n) = 0 = \det(B^n)$

Alors

B est aussi nilpotent

3) on a A et B semblables

$\Rightarrow \det(A) = \det(B) = \det(\lambda I_n)$

$\Rightarrow \det(A) = \lambda^n$

$\Leftrightarrow$ A est diagonal

$\Leftrightarrow A = \lambda I_n = B$

$\Rightarrow A = B$

Scanned by TapScanner

Ex 2

1) on a $card(B') = 3 = \dim R^3$

il suffit de montrer que B' est libre

soit λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in R$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_1 e_2 + \lambda_1 e_3 + \lambda_2 e_1 + \lambda_2 e_2 - 2\lambda_2 e_3 + \lambda_3 e_1 - \lambda_3 e_3 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Alors B' est libre

$\Rightarrow B'$ est une base de R^3

Scanned by TapScanner

2) Posons une matrice associe

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tel que

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = {}^{t}M \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

avec M est matrice de passage de base canonique à B'

Alors

$$x' = M \cdot x$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x' = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

3) soit le polynôme caractéristique de f

$C_f(8) = \det(A - XI_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-X & 3 & 3 \\ 3 & 4-X & 3 \\ 3 & 3 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 10-X & 10-X & 10-X \\ 3 & 4-X & 3 \\ 3 & 3 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (10-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4-X & 3 \\ 3 & 3 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (10-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1-X & 0 \\ 3 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (10-X)(1-X)^2$$

les valeur propres sont :

$$C_f(8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$SP = \{1, 10\}$

déterminons les sous-espace prop

Scanned by TapScanner

* E_1 :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow Ker(A - I_3)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 3x + 3y + 3z = 0$

$\Rightarrow x + y + z = 0$

$\Rightarrow z = -x - y$

$\Rightarrow E_1 = \{ (x, y, -x-y) / x, y \in \mathbb{R}^2 \}$

$= (x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \; x, y \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow E_1 = Vect((1, 0, -1), (0, 1, -1))$

* E_{10}

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{10} \Leftrightarrow Ker(A - 10I_3)$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6x + 3y + 3z = 0 \\ 3x - 6y + 3z = 0 \\ 3x + 3y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 2x - y \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = x \end{cases} \Rightarrow E_{10} = Vect(1, 1, 1)$$

Scanned by TapScanner

Scanned by TapScanner

Alors

$$E_1 = \text{vect}(V_1, V_2)$$

$$E_{10} = \text{vect}(V_3)$$

avec $\begin{cases} V_1 = (1,0,-1) \\ V_2 = (0,1,-1) \\ V_3 = (1,1,1) \end{cases}$

Alors la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

on a f est diagonalisable

$$\Rightarrow D = P^{-1}.A.P$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

4)

on a

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix}$$

on a $D^n = P^{-1} . A^n P$

$\Rightarrow A^n = P . D^n . P^{-1}$

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10^n \\ 0 & 1 & 10^n \\ -1 & -1 & 10^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+10^n & -1+10^n & 10^n-1 \\ 10^n-1 & 2+10^n & 10^n-1 \\ 10^n-1 & 10^n-1 & 2+10^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2+10^n}{3} & \frac{10^n-1}{3} & \frac{10^n-1}{3} \\ \frac{10^n-1}{3} & \frac{2+10^n}{3} & \frac{10^n-1}{3} \\ \frac{10^n-1}{3} & \frac{10^n-1}{3} & \frac{2+10^n}{3} \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

Ex3

a)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{ccc} C_1 & C_2-2C_3 & C_3 \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4$$

$$\Rightarrow \det(A) = -4$$

---

b)

on a

$$(S) \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

on a $\det(A) = -4 \neq 0$

Alors

(S) est de cramer

---

c) on a (S) est de cramer

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-4} \\[2ex] y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-4} \\[2ex] z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{-4} \\ y = \frac{-8}{-4} \\ z = \frac{4}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

l'ensemble des solutions est

$$S = \{ (-1, 2, -1) \}$$

Scanned by TapScanner

d

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^{t}\mathrm{com}(A)$$

on a $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$$\mathrm{com}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^{t}\mathrm{com}A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^{t}\mathrm{com}(A)$$

$$= \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/4 & -1 & 5/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

e)

on a

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$S = \{(-1, 2, -1)\}$$

Scanned by TapScanner

Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2018-2019
Filière : MIP
Module : M 124 Algèbre 2

EXAMEN D'ALGÈBRE - SESSION NORMALE (25 JUIN 2019)
Durée : 2h

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 2h.
Les documents, calculatrices et matériels électroniques non autorisés.

Exercice 1 : (8 pts)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
2) En déduire que A est trigonalisable mais qu'elle n'est pas diagonalisable et que son spectre est $sp(f) = \{1, 2\}$.
3) Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2 de A.
4) On pose $u = (1,0,0), v = (2,1,1)$ et $w = (0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $B = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5) Calculer la matrice T de f dans la base B.
6) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer T^n et en déduire A^n.

Exercice 2 : (5 pts)

Soit le système linéaire suivant (avec $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$) :

$$(S_{\alpha,m}) \begin{cases} (\alpha - 1)x + y - z = m \\ x + \alpha y + z = m \\ x + y + \alpha z = m + 2 \end{cases}$$

Donner, en justifiant vos réponses, le nombre de solutions de ce système selon les valeurs de α et de m (les solutions ne sont pas à calculer).

Scanned by TapScanner

Exercice 3 : (4 pts)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n telle que ${}^tA = -A$, où ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A. Soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit φ la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base B est A. Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ représentés dans la base B par les matrices colonnes X et Y respectivement.

1) Donner $\varphi(x,y)$ en fonction de X, Y et A.

2) Montrer que pour tout couple (x,y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$.

3) Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a $\varphi(x,x) = 0$.

4) En déduire que A ne possède aucune valeur propre réelle non nulle.

5) En déduire que si A est non nulle, alors A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : (3 pts)

Suivant la valeur de λ dans $\mathbb{R}$, étudier le rang et la signature de la forme quadratique définie pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$q(x,y,z,t) = x^2 + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4xy + 2xz + 4(1-\lambda)yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt.$$

Scanned by TapScanner

Exam 18 — 19

normale

EX 1

1) on a

$C_f(X) \Leftrightarrow \det(A - XI_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (1-X)^2(2-X)$$

$$C_f(X) = (1-X)^2(2-X)$$

$$m_f = (1-X)(2-X)$$

ou $m_f = (1-X)^2(2-X)$

on a

$$(1 \times I_3 - A)(2I_3 - A)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Scanned by TapScanner

* On a

$$(I_3 - A)(I_3 - A)(2 - X)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$m_f = (1 - X)^2 (2 - X)$$

$$= -(X - 1)^2 (X - 2)$$

~~On a P_f et n'est pas scindé~~

$\Rightarrow$ f n'est pas diagonalisable

Alors f est trigonalisable

Scanned by TapScanner

3)

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow Ker(A - I_3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad y = z$

$E_1 = \{ (x, 0, 0) / x \in R \}$

$\Rightarrow E_1 = vect(V_1 = (1, 0, 0))$

*

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow Ker(A - 2I_3)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow E_2 = \{ (2y, y, y) / y \in R \}$

$\Leftrightarrow E_2 = Vect(V_2 = (2, 1, 1))$

4) on a $card(B) = 3 = \dim R^3$

il suffit de montrer que B est libre

soit λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in R$

$\lambda U + \lambda_2 V + \lambda_3 W = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ B est libre

Scanned by TapScanner

5) on a

$$f(u) = A \cdot u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u$$

et

$$f(v) = A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v$$

$$f(w) = A \cdot w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u + w$$

$$\Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) on a

$$T = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$\Rightarrow A = P \cdot T \cdot P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = P \cdot T^n \cdot P^{-1}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} & n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2+2^{n+1}-n & n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

EX 2

si $\alpha = 0$

$$(S_{0,m}) = \begin{cases} y = m + x + z \\ x + z = m \\ x + y = m + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (S_{0,m}) = \begin{cases} y = 2m \\ x = 2 - m \\ z = 2m - 2 \end{cases}$$

Alors le système admet une infinité des solutions

EX 3

On a

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varphi(e_i, e_j) x_i y_j$$

$$= (x_1 . x_2 \dots x_n) . A . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= {}^tX . A . Y$$

Alors

$$\varphi = {}^tX . A . Y$$

Scanned by TapScanner

2) ⟼

soi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

On a

$$\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \varphi(e_i, e_j) x_i y_j$$

$$\Rightarrow \varphi(y,x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \varphi(e_j, e_i) y_j x_i$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \cdot {}^tA \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= {}^tX \cdot {}^tA \cdot Y$$

$$= -{}^tX \cdot A \cdot Y$$

$$= -\varphi(x,y)$$

Scanned by TapScanner

3)

soit $x \in R^n$

on a

$$\varphi(x,x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

$$= -\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

$$= -\varphi(x,x)$$

$$\varphi(x,x) = -\varphi(x,x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x,x) = 0$$

4)

on a

$$\varphi(x,x) = 0$$

$\Rightarrow \ker \varphi = \{0\}$

$\Rightarrow \varphi$ injective

$\Rightarrow$ pas de valeurs propres

$\Rightarrow$ 0 est valeur propre

5) on a

A ne possède pas de valeurs propre

et ~~0 est valeur propre~~

~~si~~ A est nulle $\Rightarrow$ 0 est valeur propr

$\Rightarrow$ A n'est pas ~~valeur propre~~ digonalisable sur R

Scanned by TapScanner

Scanned by TapScanner

Ex 4

$$Q(x,y,z,t) = x^2 + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + 4xy + 2xz + 4(1-\lambda)yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt$$

$$\Rightarrow Q(x,y,z,t) = x^2 + 2x(2y+z) + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + 4(1-\lambda)yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt$$

$$\Rightarrow q(x,y,z,t) = (x+2y+z)^2 - (2y+z)^2 + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + 4(1-\lambda)yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt$$

$$= (x+2y+z)^2 - 4y^2 - 4yz - z^2 + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + 4(1-\lambda)yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt$$

$$= (x+2y+z)^2 + \lambda y^2 - 4\lambda yz + 4\lambda z^2 + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt$$

$$= (x+2y+z)^2 + \lambda(y^2 - 4yz + 4z^2) + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt$$

$$= (x+2y+z)^2 + \lambda(y-2z)^2 + (2\lambda t)(y-2z) + zt$$

$$= (x+2y+z)^2 + \lambda(y-2z)^2 + \frac{1}{4}(2\lambda t + y - 2z)^2 - \frac{1}{4}(2\lambda t - y + 2z)^2 + \frac{1}{4}(z+t)^2 - \frac{1}{4}(z-t)^2$$

$$= (x+2y+z)^2 + \lambda(y^2 - 4yz + 4z^2) + \frac{1}{4}(t + 2\lambda y + (1-4\lambda)z)^2 - \frac{1}{4}(t - 2\lambda y - (1-4\lambda)z)^2$$

rang(q) $= 3$ si $\lambda = 0$

$\Rightarrow$ dégénéré

$\Rightarrow S = (2, 1)$

$\Rightarrow$ ni négative ni positive

rang(q) $= 4$ si $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow$ non dégénérée

$\Rightarrow S = (3, 1)$

$\Rightarrow$ ni négative ni positive

Scanned by TapScanner

A^n $\left(\right)$

Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2018-2019
Filière : MIP
Module : M 124 Algèbre 2

EXAMEN D'ALGÈBRE - SESSION DE RATTRAPAGE (JUILLET 2019)
Durée : 1h30

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 1h30 heures.
Les documents, calculatrices et matériels électroniques non autorisés.

Exercice 1 : (5 pts)

Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est

$$C_A(X) = X^3 - 2X^2 + 3X + 2.$$

a) Exprimer A^{-1} en fonction de I_3, A et A^2.

b) Exprimer A^5 en fonction de I_3, A et A^2.

Exercice 2 : (8 pts)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $\lambda = -1$ est valeur propre de A et trouver un vecteur propre, noté v, associé à cette valeur propre.

2) Montrer que $B' = \{v, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice T de f dans cette base.

3) a) Quelles sont les valeurs propres de f ?

b) f est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$?

4) En utilisant la matrice T, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

λ val. p
si $\det(A - \lambda I_3) = 0$.

Scanned by TapScanner

Exercice 3 : (7 pts)

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ par :

$$\varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1.$$

1) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$.

2) Donner la matrice de φ dans la base canonique. Quelle est la forme quadratique q associée à φ ?

3) Donner le rang ainsi que le noyau de q.

4) Appliquer la méthode de Gauss à q et donner sa signature.

5) Donner une base q-orthogonale.

6) Quelle est la matrice de q par rapport à cette base ?

@ Touanzi-2020

Scanned by TapScanner

Exam 18 — 19
rattrapage

Ex 1

On a $C_A(X)$ est Polynome minimale de A

$C_A(A) = 0 = m_A(A)$

$\Rightarrow A^3 - 2A^2 + 3A + 2I_3 = 0$

$A^{-1} \cdot (A^3 - 2A^2 + 3A + 2I_3) = 0$

$A^2 - 2A + 3I_3 + 2A^{-1} = 0$

$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}A^2 + A - \frac{3}{2}I_3}$

b)

On a

$A^3 - 2A^2 + 3A + 2I_3 = 0$

$A^2 \cdot (A^3 - 2A^2 + 3A + 2I_3) = 0$

$A^5 - 2A^4 + 3A^3 + 2A^2 = 0$

$A^5 - 2(2A^3 - 3A^2 - 2A) + 3A^3 + 2A^2 = 0$

$A^5 - 4A^3 + 6A^2 + 4A + 3A^3 + 2A^2 = 0$

$A^5 - A^3 + 8A^2 + 4A = 0$

$A^5 - 2A^2 + 3A + 2I_3 + 8A^2 + 4A = 0$

$A^5 + 6A^2 + 7A + 2I_3 = 0$

$\boxed{\Rightarrow A^5 = -6A^2 - 7A - 2I_3}$

Scanned by TapScanner

EX 2

1) on a

$$C_f(f) = \det(A - XI_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 4-X & -5 & 5 \\ 3 & -4-X & 5 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X) \begin{vmatrix} 4-X & -5 \\ 3 & -4-X \end{vmatrix}$$

$$= (4-X) \begin{vmatrix} -4-X & 5 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (4-X)(4+X) - 3(-5+5X)$$

$$= -X^2 + 31 - 15X$$

Scanned by TapScanner

Ex 2

1)

on a

$\det(A+I_3) =$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

$\Leftrightarrow \det(A-(-1)I_3) = 0$

$\Leftrightarrow -1$ est valeurs propres

on a

* ~~E_{-1}~~

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A+I_3)$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + \cancel{5} = 0 \\ 3x - 3y + 5z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow E_{-1} = \{(x, x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow E_{-1} = \operatorname{vect}((1,1,0))$

$V = (1,1,0)$

~~3)~~ @Touanzi_2020

Scanned by TapScanner

Scanned by TapScanner

2) On a card $B' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Alors il suffit que B' est libre

soit λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 V + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow B'$ est libre

$\Rightarrow B'$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Scanned by TapScanner

~~soit~~ ~~[illegible]~~

soit P

la matrice de passage dont les colones sont les coordonnés des vecteurs de base B'

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$T = P^{-1} . A . P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) on a

$$C_f(f) = \det(A - XI_3)$$

$$= (1-X)^2(1+X)$$

$$\Rightarrow SP(f) = \{1, -1\}$$

Scanned by TapScanner

$\{0 \quad 0 \quad 1\}$

3) On a

$$C_f(f) = \det(A - XI_3)$$
$$= (1-X)^2(1+X)$$

$$\Rightarrow SP(f) = \{1, -1\}$$

b) On a

$$\det(A - I_3) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 5 \\ 3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 0$$

$\Rightarrow$ f n'est pas injective

avec $E = F = R^3$

$\Rightarrow$ f n'est pas bijective

$\Rightarrow$ f n'est pas isomorphisme

4) On a

$$T = P^{-1}.A.P$$
$$\Rightarrow \quad A = P.T.P^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad A^n = P.T^n.P^{-1}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (-1)^n & -n5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & -5n & 5 \\ (-1)^n & 1-5n & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n + 5n & -5n & 5 \\ (-1)^n + 5n - 1 & 1-5n & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

Ex 3

1) soit $\begin{cases} x=(x_1,x_2,x_3) \\ y=(y_1,y_2,y_3) \\ z=(z_1,z_2,z_3) \end{cases} \in \mathbb{R}^3$

On a

$\varphi(\lambda x+\beta z, y)$
$= \lambda x_1y_2+\beta z_1y_2+\lambda x_2y_1+\beta z_2y_1$
$+ \lambda x_1y_3+\beta z_1y_3+\lambda x_3y_1+\beta z_3y_1$

$= \lambda(x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1)$
$+\beta(z_1y_2+z_2y_1+z_1y_3+z_3y_1)$
$= \lambda\varphi(x,y)+\beta\varphi(z,y)$

$\Rightarrow$ φ est linéaire à premier variable

$*$ $\varphi(x, \lambda y+\beta z)$

$=\lambda x_1y_2+\beta x_1z_2+\lambda x_2y_1+\beta x_2z_1$
$+\lambda x_1y_3+\beta x_1z_3$
$+\lambda x_3y_1+\beta x_3z_1$

$= \lambda(x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1)$
$+\beta(x_1z_2+x_2z_1+x_1z_3+x_3z_1)$

$= \lambda\varphi(x,y)+\beta\varphi(x,z)$

$\Rightarrow$ φ est une forme bilinéaire

$*$ On a

$\varphi(y,x) = y_1x_2+y_2x_1+y_1x_3+y_3x_1$
$= \varphi(x,y)$

$\Rightarrow$ φ est symétrique

2)

la matrice de φ dans la base canonique est

$$M_{\varphi,B} = \varphi(e_i,e_j)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$q(x) = \varphi(x,x)$

$= 2x_1x_2+2x_1x_3$

Scanned by TapScanner

Scanned by TapScanner

3)

On a

$$M_\varphi = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a $V_2 = V_3$

$\Rightarrow$ le rang$(q) = 2$

et $v \in \mathrm{Ker}\, q \Leftrightarrow \varphi(x, x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x_1(x_2 + x_3) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 0$ ou $x_2 = -x_3$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, q = \{(0, x_2, x_3), (x_1, x_2, -x_2)\}$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Vect}((0,1,0), (0,0,1), (1,0,0), (0,1,-1))$

Scanned by TapScanner

Scanned by TapScanner

4)

On a

$$q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

$$= 2x_1(x_2 + x_3)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3)^2$$

$\Rightarrow$ sa signature est

$$S = (1, 1)$$

Scanned by TapScanner

5) on a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 - x_2 - x_3 = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

On va compliter avec un vecter libre

, soit $V_3^* = (0, 0, 2)$

on a $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$

$\neq 0$

$\Rightarrow (V_1, V_2, V_3^*)$ est libre ~~et~~

$\Rightarrow$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 - x_2 - x_3 = b \\ 2x_3 = c \end{cases}$$

Scanned by TapScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = a - \frac{1}{2}c \\ x_2 = x_1 - x_3 - b \\ x_3 = \frac{1}{2}c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = a + b \\ x_2 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c - b \\ x_3 = \frac{1}{2}c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ x_2 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ x_3 = \frac{1}{2}c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ une base ortogonale de q est

$$B' = \left((1/2, 1/2, 0), (1/2, -1/2, 0), (0, -1/2, 1/2) \right)$$

6) la matrice diagonale de q est

$$D = {}^tP . A . P$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

Université Moulay–Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2017-2018
Section : MIP S2
Module : M 124

EXAMEN D'ALGÈBRE (Pour les libres)
Durée : 1h30

Exercice 1 : (4 pts)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique. Soit a un réel et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$q(x,y) = x^2 + y^2 + 2axy.$$

1) Réduire q par la méthode de Gauss.
2) Discuter suivant les valeurs de a, le rang et la signature de q.
3) Déterminer une base $\{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour q.

Exercice 2 : (6 pts)

Soient m et a deux paramètres réels. On considère le système linéaire

$$(S_{m,a}) \begin{cases} mx - 2y + z = 1 \\ -2x + y + mz = a \\ x + my - 2z = 1 \end{cases}$$

1) Pour quelles valeurs de m, $(S_{m,a})$ est de Cramer ?
2) Discuter suivant les valeurs de m le rang du système $(S_{m,a})$.
3) Résoudre le système $(S_{0,1})$ ($m = 0$ et $a = 1$) par la méthode des déterminants.
4) Résoudre le système $(S_{1,a})$. Discuter suivant la valeur du paramètre a.

Exercice 3 : (10 pts)

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ par :

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ f(x) = (x_1, -x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2 + 5x_3).$$

1) Écrire la matrice A de f dans la base B.
2) A est-elle diagonalisable ?

Scanned by TapScanner

3) Soient $u_1 = (1,1,-1), u_2 = (0,1,-1), u_3 = (0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
a) Vérifier que $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Écrire la matrice P de passage de B à B'.
c) Calculer P^{-1}.
d) En déduire la matrice A' de f dans la base B'.

4) Calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5) On considère 3 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} + 2v_{n-1} \\ w_n = u_{n-1} + 3v_{n-1} + 5w_{n-1} \end{cases} \quad \textit{avec} \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \\ w_0 = 3 \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction n.

Scanned by TapScanner

Exam 17 – 18
libre

Exercice 1

1) on a

$$q(x,y) = x^2 + y^2 + 2axy$$
$$= x^2 + 2xay + y^2$$
$$= (x+ay)^2 - a^2y^2 + y^2$$
$$= (x+ay)^2 + (1-a^2)y^2$$

2)

si $a = \pm 1$

$\Rightarrow$ rang$(q) = 1 \Rightarrow S = (1,0)$

si $a \neq \pm 1 \Rightarrow$ rang $= 2$

alors

* si $a < -1$ ou $a > 1$

$\Rightarrow S = (1,1)$

* si $-1 < a < 1$

$\Rightarrow S = (2,0)$

* nondégénéré
* définie positive

Scanned by TapScanner

~~[illegible]~~

3) $\begin{cases} x + ay = \alpha \\ \cancel{1} \quad y = \beta \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha - a\beta \\ y = \beta \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ la base ortogonale de q est

$b = \{ (1,0), (-a, 1) \}$

EX 2

1) on a

$$\begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ -2 & 1 & m \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m-1 & m-1 & m-1 \\ -2 & 1 & m \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & m \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix}$$

Scanned by TapScanner

$=$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & m \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & m+2 \\ 1 & m-1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} 3 & m+2 \\ m-1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)\left(-9-(m+2)(m-1)\right)$$

$\det(S_{m,a}) \neq 0$

$\Rightarrow \quad m-1 \neq 0$

ou $-9-(m+2)(m-1) \neq 0$

$\Rightarrow \quad m \neq 1$

ou $-m^2-m-7 \neq 0$

$\Delta = (-1)^2-4\times(-1)\times(-7)$

$= 1-28$

$= -27 < 0$

$\Rightarrow \quad m \neq 1$

Alors pour que $S_{m,a}$ soit de cramer il faut que $m \neq 1$

Scanned by TapScanner

2) si $m \neq 1$

Alors $\det(S_{m,a}) \neq 0$

$\Rightarrow$ le rang $= 3$

* si $m = 1$

$$S_{1,a} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = a \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

On a

$$M_{S_{1,a}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_2 + L_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} L_3 - L_1$$

$\Rightarrow$ rang $= 1$

Scanned by TapScanner

3)
on a :

$$S_{0,1} = \begin{cases} -2y+z=1 \\ -2x+y=1 \\ x-2z=1 \end{cases}$$

on a

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1-6$$
$$= -7$$

et

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3-4$$
$$= -7$$

et

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4-3$$
$$= -7$$

et on a

$$\det(S_{0,1}) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8-1$$
$$= 7$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\det(S_{0,1})} = \dfrac{-7}{7} = -1 \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\det(S_{0,1})} = \dfrac{-7}{7} = -1 \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\det(S_{0,1})} = \dfrac{-7}{7} = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow S = \{(-1,-1,-1)\}$$

Scanned by TapScanner

4) on a

$$(S_{1,a}) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = a \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3y - 3z = a + 2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y - z \\ 3y - 3z = a + 2 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ si $a + 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq -2$

Alors le systeme n'admet pas de solution

si $a + 2 = 0$

$\Leftrightarrow a = -2$

Alors

$$S_{1,-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z + 1 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = z \end{cases}$$

$\Leftrightarrow S = \{ (y+1, y, y) \}$

le système $(S_{1,-2})$ admet une infinité des solution

Scanned by TapScanner

EX 3

1) on a

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,-1,1)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,2,3)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,0,5)$

$\Longrightarrow$

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2) on a

$C_f(X) = \det(A - XI_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -1 & 2-X & 0 \\ 1 & 3 & 5-X \end{vmatrix}$$

$\Leftrightarrow (1-X)(2-X)(5-X)$

$C_f(X) = 0 \Leftrightarrow (1-X)(2-X)(5-X)$

$\Rightarrow$ les valeurs propre de f sont $\{1, 2, 5\}$

Scanned by TapScanner

* Détermination des sous espaces pro

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff Ker(A - I_3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ 4\cancel{y}x \cancel{+} 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ z = -x \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$E_1 = \{ (x, x, -x)^t / x \in R \}$$

$$\Rightarrow E_1 = vect((1, 1, -1))$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff Ker(A - 2I_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_2 = \{ (0, y, -y) / y \in R \}$$

$$E_2 = vect((0, 1, -1))$$

Scanned by TapScanner

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_5 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A - 5I_3)$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x = 0 \\ -x - 3y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_5 = \{(0,0,z) / z \in \mathbb{R}\}$$

$$E_5 = \mathrm{Vect}((0,0,1))$$

On a

$$\begin{cases} \dim E_1 = 1 = \text{multiplicité} \\ \dim E_2 = 1 = \text{multiplicité} \\ \dim E_5 = 1 = \text{multiplicité} \end{cases}$$

et $C_A(x)$ est scindé

$\Rightarrow$ A est diagonalisable

Scanned by TapScanner

3) on a card $B' = 3 = \dim R^3$

Alors il suffit que B' soit libre

soit λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in R$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow B'$ est libre

$\Rightarrow B'$ est une base de R^3

Scanned by TapScanner

b) la matrice de passage de B à B'

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

c) $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t com(P)$

$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$com(P) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t com = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) on a

$$A' = P^{-1} . A . P$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 5 \end{matrix}$$

4) ona $A' = P^{-1}.A.P$

$\Rightarrow A = P.A'.P^{-1}$

$$\Rightarrow A^n = P.A'\underbrace{P^{-1}.P}_{I_3}.A'.\underbrace{P^{-1}\ldots P}_{I_3}.A'.P^{-1}$$

$$= P.(A')^n.P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = P.(A')^n.P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2^n & 0 \\ -1 & -2^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 5^n-2^n & 5^n \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

5) on a

$$U_n = U_{n-1}$$
$$V_n = -U_{n-1} + 2V_{n-1}$$
$$W_n = U_{n-1} + 3V_{n-1} + 5W_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Poson

$$Z_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$Z_n = A \cdot Z_{n-1} \quad (1)$$
$$Z_{n-1} = A Z_{n-2} \quad (2)$$
$$\vdots$$
$$Z_1 = A \cdot Z_0 \quad (n)$$

on multipliant les enégalité

$$(1) \times (2) \times (3) \ldots \ldots \times (n)$$

et on simplifiant

on optient

$$Z_n = A^n \cdot Z_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)^n & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 5^n-2^n & 5^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_n = (1)^n \\ V_n = 1-(2)^n + (2)^{n+1} \\ W_n = 2^n + 2\times5^n - 2^{n+1} + 3\times5^n - 1 \end{cases}$$

Scanned by TapScanner

Scanned by TapScanner

Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2017-2018
Section : MIP S2
Module : M 124

EXAMEN D'ALGÈBRE - SESSION NORMALE (JUIN 2018)

Durée : 2h

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 2 heures. Les documents, calculatrices et matériels électroniques non autorisés.

Questions de cours : (2 pts)

1) Rappeler à quelles conditions deux matrices A et B données sont dites semblables.

2) Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Exercice 1 : (3 pts)

Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Exercice 2 : (6 pts)

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère, pour tout nombre réel a, la matrice carrée $M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

2) a) Montrer que J est diagonalisable.

   b) Déterminer une matrice réelle diagonale D d'ordre trois et une matrice réelle inversible P d'ordre trois telle que $J = PDP^{-1}$.

3) En déduire, après avoir exprimé M_a en fonction de I_3 et J, que pour tout nombre réel a, il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.

4) Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?

Scanned by TapScanner

Exercice 3 : (4 pts)

Soit Δ_n le déterminant d'ordre $n \geq 2$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1) Calculer Δ_2 et Δ_3.

2) Démontrer que, pour $n \geq 2$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.

3) En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 4 : (5 pts)

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x,y,z) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz.$$

1) Donner la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) Calculer le déterminant de A.

3) Pour quelles valeurs de a la forme quadratique q est-elle non dégénérée ?

4) Réduire q et donner son rang et sa signature en fonction de a.

5) Déterminer une base orthogonale pour q.

6) Quelle est la matrice de q par rapport à cette base ?

Scanned by TapScanner

Exam 17 – 18

Normale

Questions de cours

1) deux matrices ~~est~~ sont dites semblables

si $\exists$ $P \in M_n(K)$ inversible telque

$$A' = P^{-1} . A . P$$

2) soit A et A' deux matrices semblables

$C_A(X) = \det(A - XI_n)$

. on a $A' = P^{-1} . A . P$

et $\det(A) = \det(A')$

on a $A - XI_n \Leftrightarrow P . A' . P^{-1} - XI_n$

$\Leftrightarrow P . A' . P^{-1} - XP . P^{-1}$

$\Leftrightarrow (P . A' - XP) . P^{-1}$

$\Leftrightarrow (P . A' - PX) . P^{-1}$

$\Leftrightarrow P . (A' - XI_n) . P^{-1}$

$\Rightarrow$ que $(A - XI_n)$ et $(A' - XI_n)$ est semblable

$\Rightarrow \det(A - XI_n) = \det(A' - XI_n)$

$\Rightarrow C_A(X) = C_{A'}(X)$

Scanned by TapScanner

Ex 1

soient A et $B \in M_n(\mathbb{C})$

On a

$AB - XI_n$

$\Leftrightarrow (A - XB^{-1}).B$

$\Leftrightarrow B^{-1}.B(A - XB^{-1}).B$

$\Leftrightarrow B^{-1}.(BA - XI_n).B$

$\Rightarrow$ Alors

$(AB - XI_n)$ et $(BA - XI_n)$

sont sembldable Alors

$\Rightarrow \det(AB - XI_n) = \det(BA - XI_n)$

$\Rightarrow C_{AB}(X) = C_{BA}(X)$

Exercice 2

1) on a

$C_f(X) \Leftrightarrow \det(f - XI_n)$

$$\begin{vmatrix} -X & 2 & 1 \\ 0 & -1-X & 2 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -1-X & 2 \\ 1 & -X \end{vmatrix}$$

$= -X(+X(1+X) - 2)$

$= -X(X + X^2 - 2)$

$C_f(X) = 0 \Leftrightarrow -X(X + X^2 - 2) = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

$\Rightarrow$ les valeurs propre de f sont

$Sp(f) = \{0, 1, -2\}$

Scanned by TapScanner

Détermination des sous espaces pro

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \Leftrightarrow Ker(J - 0 \times I_3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow E_0 = \{(x, 0, 0) / x \in R\}$

$E_0 = Vect((1, 0, 0))$

$\ast \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow Ker(J - 1 \times I_n)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ \\ y = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ z = y \end{cases}$

$\Rightarrow E_1 = \{(3y, y, y) / y \in R\}$

$\Rightarrow E_1 = vect((3, 1, 1))$

Scanned by TapScanner

Scanned by TapScanner

E_{-2}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \Leftrightarrow Ker(J + 2I_3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow E_{-2} = \left\{ \left(\frac{3}{2} z, -2z, z \right) / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$E_{-2} = Vect((3, -4, 2)$

Scanned by TapScanner

2) a

on a

$$\begin{cases} \dim E_0 = 1 = \text{multiplicité de } 0 \\ \dim E_1 = 1 = \text{" " } 1 \\ \dim E_{-2} = 1 = \text{" " } -2 \end{cases}$$

$C_f(X)$ est scindé

et $\dim E_0 + \dim E_1 + \dim E_{-2} = 3$
$= \dim R^3$

$\Rightarrow f$ est diagonalisable

b)

soit

P la matrice de passage dont les colones sont les coordonée des vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D = P^{-1} \cdot J \cdot P$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot P$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

3) ---

On a

$$M_a = J + aI_3$$

$$P^{-1} . M_a . P = P^{-1} . (J + aI_3) . P$$

$$D_a = (P^{-1} . J + aP^{-1}) . P$$

$$D_a = P^{-1} . J . P + aI_3$$

$$D_a = D + aI_3$$

$$D_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$D_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & -2+a \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

4)

On a

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

M_a inversible $\Leftrightarrow \det(M_a) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a\left((a-1)a - 2\right) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(a^2 - a - 2\right) \neq 0$$

$\Delta = 9$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$\Rightarrow$ M_a inversible $\Leftrightarrow a \neq \{0, -1, 2\}$

Scanned by TapScanner

Exercice 3

1) on a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 21 - 6$$

$$= 15$$

2) on a

$$\Delta_{n+2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

ordre $n+2$

$$= 3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

ordre $n+1$

$$= 3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\left(1\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 2 & 3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & & \end{vmatrix}}_{=0}\right)$$

ordre $n+1$ ordre n

$$\Rightarrow \Delta_{n+2} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & & & \\ 0 & 2 & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

ordre $n+1$ ordre n

$$= 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n}$$

3) on a

$$\Delta_2 = 7 = 2^3 - 1$$

$$\Delta_3 = 15 = 2^4 - 1$$

Alors

Mq $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$

Pour $n = 2$

on a $\Delta_2 = 2^4 - 1 = 7$

est vrai

Alors

supposon que $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$

Mq $\Delta_{n+2} = 2^{n+3} - 1$

on a $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$

$$-2\Delta_n = -2^{n+2} + 2$$

$$3\Delta_{n+1} = 3\times 2^{n+2} - 3$$

$$\Rightarrow 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n = 3\times 2^{n+2} - 3 - 2^{n+2} + 2$$

$$= 2^{n+3} - 1 = \Delta_{n+2}$$

Alors Par récurrence double $\forall n \geq 2$ $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$

EX 4

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & -a \\ 0 & -a & 1+a+a^2 \end{pmatrix}$$

2) on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & -a \\ 0 & -a & 1+a+a^2 \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & -a \\ 0 & -a & 1+a+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & +a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= a(1+a^2)$$

$$= a^3 + a$$

3) q est dégénéré si

$1 + a = 0$

ou $(1 + a + a^2 = 0$

$\Rightarrow a = -1$

ou $a^2 + a + 1 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 1 - 4$

$= -3$

n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ q est non dégénérée

si $a \neq -1$

4) ἀπα

$$q(x,y,z) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2axy - 2ayz$$

$$= x^2 + 2axy + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 - 2ayz$$

$$= (x+y)^2 - y^2 + (1+a)y^2 - 2ayz + (1+a+a^2)z^2$$

$$= (x+y)^2 + ay^2 - 2yaz + (1+a+a^2)z^2$$

$$= (x+y)^2 + a(y^2 - 2yz) + (1+a+a^2)z^2$$

$$= (x+y)^2 + a(y-z)^2 - az^2 + (1+a+a^2)z^2$$

$$= (x+y)^2 + a(y-z)^2 + (1+a^2)z^2$$

Scanned by TapScanner

* si $a = 0$

$\Rightarrow rang(q) = 2$

$\Rightarrow$ Signature es

$S = (2, 0)$

$\Rightarrow$ définie positive

* si $a \in \mathbb{C}$

et $a = i$

$\Rightarrow rang(q) = 2$

$\Rightarrow \cancel{S = (2, 0)}$

* si

$a < -i$ ou $a > i$

$\Rightarrow S = (2, 0)$

si $a - i < a < i$

$\Rightarrow S = (1, 1)$

---

5) on a

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ y - z = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha - \beta - \gamma \\ y = \beta + \gamma \\ z = \gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Base ortogonale est

$((1, 0, 0), (-1, 1, 0), (-1, 1, 1))$

6) $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & -a \\ 0 & -a & 1+a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

@Toufik Ouanzi

Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2017-2018
Filière : MIP
Module : M 124

EXAMEN D'ALGÈBRE - SESSION DE RATTRAPAGE (JUILLET 2018)

Durée : 1h30

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 1h 30min. Les documents, calculatrices et matériels électroniques non autorisés.

Exercice 1 : (8 pts)

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni des bases $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ et $B' = \{u = (1,0,1), v = (0,1,0), w = (1,0,-1)\}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base B est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Donner l'expression de $f(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2) Montrer que f est bijective.

3) Calculer $f(u), f(v)$ et $f(w)$. En déduire $D = M_{B'}(f)$ la matrice associée à f relativement à la base B'.

4) Donner P la matrice de passage de B vers B' et calculer son inverse P^{-1}.

5) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : (7 pts)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$ un élément de $M_2(\mathbb{R})$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) Donner l'expression de la forme quadratique q associée à la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2) Suivant la valeur de λ, étudier la signature de la forme quadratique q.

3) On suppose que $\lambda \neq -1$. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = {}^tPMP$.

Scanned by TapScanner

Exercice 3 : (5 pts)

Résoudre le système linéaire suivant en discutant selon les valeurs des paramètres réels a et m :

$$\begin{cases} x+2z=2 \\ x-my=a \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Scanned by TapScanner

Exam 17 - 18
rattrapage

Ex 1 soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

on a

$(x,y,z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$

$\Rightarrow f(x,y,z) = f(x e_1 + y e_2 + z e_3)$

f est linéaire

$\Rightarrow f(x,y,z) = f(x e_1) + f(y e_2) + f(z e_3)$

$= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$

$= x(1,0,2) + y(0,-1,0) + z(2,0,1)$

$= (x + 2z, -y, 2x + z)$

$\Rightarrow f(x,y,z) = (x+2z, -y, 2x+z)$

Scanned by TapScanner

2) on a f est endomorphisme

$\Rightarrow E = F = \mathbb{R}^3$

il suffit que f soit injective

f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$

$(x,y,z) \in Ker(f)$

$\Leftrightarrow f(x,y,z) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \\ -3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

$\Rightarrow Ker(f) = \{0\}$

$\Rightarrow f$ est injective

$\Rightarrow f$ est bijective

Scanned by TapScanner

3) on a

$$f(u) = A.u$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$= 3u$$

$$f(v) = A.v$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= -v$$

$$f(w) = A.w$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= -w$$

$\Rightarrow$ $\{3, -1\}$ ~~sont~~ valeurs propre

$\Rightarrow$ $f(u) = 3u$
$f(v) = -v$
$f(w) = -w$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f(u) \\ f(v) \\ f(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

4) on a la matrice de passage de B à B' est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot {}^{t}com(P)$$

~~p~~par calcule on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

5) on a

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$\Rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & (-1)^n \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 3^n & 0 & -(-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+(-1)^n}{2} & 0 & \frac{3^n-(-1)^n}{2} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ \frac{3^n-(-1)^n}{2} & 0 & \frac{3^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

Ex2

1) soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$q = (1+\lambda)x_1^2 + (1+\lambda)x_2^2 + (2-2\lambda)x_1x_2$$

2) on a

$$q = (1+\lambda)x_1^2 + (1+\lambda)x_2^2 + 2(1-\lambda)x_1x_2$$

$$= (1+\lambda)\left(x_1^2 + \frac{2(1-\lambda)}{1+\lambda}x_1x_2 + x_2^2\right)$$

$$= (1+\lambda)\left[\left(x_1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_2\right)^2 - \frac{(1-\lambda)^2}{(1+\lambda)^2}x_2^2 + x_2^2\right]$$

$$= (1+\lambda)\left(x_1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_2\right)^2 - \frac{(1-\lambda)^2}{(1+\lambda)}x_2^2 + (1+\lambda)x_2^2$$

$$= (1+\lambda)\left(x_1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_2\right)^2 + \left(\frac{(1+\lambda)^2 - (1-\lambda)^2}{1+\lambda}\right)x_2^2$$

$$= (1+\lambda)\left(x_1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_2\right)^2 + \frac{4\lambda}{1+\lambda}x_2^2$$

Alors

* si $\lambda = -1$

  q est n'est pas définie

* si $\lambda \neq -1$

  si $\lambda < -1$

  $\Rightarrow S = (1, 1)$

  si $\lambda = 0$

  $\Rightarrow S = (1, 0)$

  si $\lambda > -1$ et $\lambda \neq 0$

  $\Rightarrow S = (2, 0)$

Scanned by TapScanner

3)

On a

$$q = (1+\lambda)\left(x_1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_2\right)^2 + \frac{4\lambda}{1+\lambda}x_2^2$$

si $\lambda \neq -1$

Alors

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_2 = a \\ x_2 = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a - \frac{1+\lambda}{1+\lambda}b \\ x_2 = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\lambda}{1+\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\lambda}{1+\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\lambda-1}{\lambda+1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = {}^tP.M.P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\lambda-1}{\lambda+1} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \frac{4\lambda}{\lambda+1} \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

Exercice 3

$$S_{m,a} = \begin{cases} x + 2z = 2 \\ \cancel{x} - my = a \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 2 \\ -(m+1)y - z = a - 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\left(-(m+1)y - a + 1\right) \\ z = 1 - a - (m+1)y \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(m+1)y + 2a \\ z = 1 - a - (m+1)y \\ y = 1 - 2(m+1)y - 2a - 1 + a + (m+1)y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(m+1)y + 2a \\ z = 1 - a - (m+1)y \\ y = -a - (m+1)y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\dfrac{(m+1)a}{m+2} + 2a \\ y = \dfrac{-a}{m+2} \\ z = -a + \dfrac{a(m+1)}{m+2} \end{cases}$$

Scanned by TapScanner

si

$m=-2$

$\Rightarrow$ le système n'admet pas de solution $S=\{\emptyset\}$

* si $m\neq -2$ et $a\neq 0$

$\Rightarrow$ le systeme admet un infinité des solutions

si $m\neq -2$ et $a=0$

~~$\Rightarrow$ le système admet pas de~~

~~solution (, 0)~~

le sytème admet infinité de solution

$S=\{(2-2z, z-1, z) / z\in R\}$

toufik ouanzi

Scanned by TapScanner

Scanned by TapScanner

Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2016-2017
Section : MIP S2
Module : M 124

EXAMEN D'ALGÈBRE - 19 JUIN 2017

Durée : 2h

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure 2 heures. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdis.

Exercice 1 : (6 pts)

Soit q_n la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q_n(x) = x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

avec $n \geq 3$.

1) Donner la matrice de q_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   On prendra dans toute la suite $n = 3$, et on écrira $q = q_3$.

2) Vérifier que, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

3) Réduire, en utilisant la méthode de Gauss, la forme quadratique q.

4) En déduire le rang et la signature de q.

5) Déterminer une base orthogonale de q.

6) Écrire la matrice de q dans cette base.

Exercice 2 : (4 pts)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et on considère le déterminant d'ordre $n \geq 2$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & & & . \\ . & . & & . & . & & . \\ . & . & . & & . & . & . \\ \alpha & \alpha & . & . & . & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

1) Calculer Δ_2 et Δ_3.

2) Trouver une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}.

3) En déduire la valeur de Δ_n.

Scanned by TapScanner

Exercice 3 : (10 pts)

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme f de E dans la base B.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?
2) Montrer que la famille $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, avec $e'_1 = (1, 0, -1), e'_2 = (0, 1, -1)$ et $e'_3 = (0, 1, 1)$, est une base de E.
3) Écrire la matrice D de f dans la base B'.
4) déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B' et calculer P^{-1}.
   Pour toute matrice carrée M d'ordre 3, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$T_n(M) = I_3 + \frac{1}{1!}M + \frac{1}{2!}M^2 + \ldots + \frac{1}{n!}M^n.$$
5) Montrer que $T_n(A) = PT_n(D)P^{-1}$.
6) Calculer $T_n(D)$ sous forme matricielle, puis calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} T_n(D)$.
7) En déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} T_n(A)$.

Indications

- On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n\right) = e^x$.
- Si $M_n = \left(a_{ij}^n\right)$ est une suite de matrices dépendant de n, on définit $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} M_n$ comme étant la matrice $\left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_{ij}^n\right)$.
- La matrice $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} T_n(M)$ s'appelle l'exponentielle de la matrice M.

Scanned by TapScanner

Exam 16 – 17

Exercice 1

1) la matrice q_n est

$$M_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$

On a

$$q(x) = q_3 = x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{2} x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq 3} x_i x_j$$

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Alors est Vrai

3) on a

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$= x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + 2x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2$$

4)

on a

le rang$(q) = 3$

signature de q $S = (2,1)$

Scanned by TapScanner

5) on a soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a - b - c \\ x_2 = b \\ x_3 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Soit une base ortogonale de q es

$$B' = \left((1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1) \right)$$

6) soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ la matric

de passage de B à base ortogonale

$$D_q = {}^tP \cdot M_q \cdot P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & - \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

Exercice 2

1) on a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1-\alpha$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha-1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\alpha)(1-\alpha)$$

$$= (1-\alpha)^2$$

2) on a

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & & \\ \alpha & \alpha & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \alpha & \cdots & & & 1 \end{vmatrix} \text{ d'ordre } n$$

$$= 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1} - \alpha \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{vmatrix}}_{n-1}$$

$$= 1\,\Delta_{n-1} - \alpha\,\Delta_{n-1} + 0 + 0 + 0 + \cdots$$

$$\Delta_n = (1-\alpha)\Delta_{n-1}$$

Scanned by TapScanner

3) supposons que

$$\Delta n = (1-\alpha)^{n-1}$$

Pour $n = 2$

on a $\Delta_2 = (1-\alpha)^1$

est vrai

Alors supposons que

$$\Delta n = (1-\alpha)^{n-1}$$

Montrons que

$$\Delta_{n-1} = (1-\alpha)^{n-2}$$

on a

$$\begin{cases} \Delta n = (1-\alpha)^{n-1} \\ \Delta n = (1-\alpha)\Delta_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-\alpha)}\Delta n = \frac{(1-\alpha)^{n-1}}{(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \Delta n-1 = \frac{(1-\alpha)^{n-1}}{(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \Delta_{n-1} = (1-\alpha)^{n-1} \times (1-\alpha)^{-1}$$

$$= (1-\alpha)^{n-2}$$

Alors

$\forall n \geq 2$

$$\Delta n = (1-\alpha)^{n-1}$$

Scanned by TapScanner

Exercice 3

1) on a

$C_f(X) \Leftrightarrow \det(A - XI_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2-X & 0 & 0 \\ 3 & 1-X & 3 \\ 3 & 3 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= -(2+X)\left((1-X)^2 - 9\right)$$

$$= -(2+X)(X^2 - 2X + 1 - 9)$$

$$= -(2+X)(X^2 - 2X - 8)$$

$$\Delta = (-2)^2 + 4 \times 8$$
$$= 4 + 32$$
$$= 36$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{36}}{2} =$$

$$x_2 = \frac{2-\sqrt{36}}{2} =$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$C_f(X) = (2+X)^2(X-4)$$

Scanned by TapScanner

* $C_f(X) = 0$

$\Leftrightarrow -(2+X)^2(X-4) = 0$

$\Rightarrow$ les valeurs propres sont

$Sp(f) = \{-2, 4\}$

* Determination d'espace propre

* E_{-2}

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \Leftrightarrow Ker(A + 2I_3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 3x + 3y + 3z = 0$

$\Rightarrow x + y + z = 0$

$\Rightarrow z = -x - y$

$\Rightarrow E_{-2} = \{(x, y, -x-y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow E_{-2} = vect((1, 0 -1), (0, 1, -1))$

* E

Scanned by TapScanner

$\Rightarrow E_{-2} = \text{Vect}\left[(1,0-1),(0,1,-1)\right)$

$* \ E_4$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \Leftrightarrow \text{Ker}(A - 4I_3)$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6x = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$E_4 = \{(0,y,y) / y \in R\}$

$E_4 = \text{vect}((0,1,1))$

Alors on a

$$\begin{cases} \dim E_{-2} = 2 = \text{multiplicité de } -2 \\ \dim(E_4) = 1 = \text{multiplicité de } 4 \\ \dim E_{-2} + \dim E_4 = 3 = \dim R^3 \end{cases}$$

et $C_A(X)$ est scindé

$\Rightarrow$ A est diagonalisable

Scanned by TapScanner

2) on a

$$\text{card } B' = 3 = \dim R^3$$

il suffit de montrer que B' est libre

soit S la matrice dont les colonnes sont les coordonées des vectur de base B'

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(S) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ B' est libre

Alors
B' est Base de R^3

3) on a

$$f(e_1') = A \cdot e_1' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 e_1'$$

$$f(e_2') = A \cdot e_2' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 e_2'$$

$$f(e_3') = A \cdot e_3' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 e_3'$$

$$\Rightarrow D = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array} \end{array}$$

Scanned by TapScanner

4) on a la matrice de passage de Base B à B' est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot {}^{t}com(P)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

on a

$$D = P^{-1} . A . P$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

5) on a

$$D = P^{-1}.A.P$$

$$\Rightarrow A = P.D.P^{-1}$$

$$\Rightarrow T_n(A) = I_3 + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n$$

$$= I_3 + \frac{1}{1!}P.D.P^{-1} + \frac{1}{2!}(P.D.P^{-1})^2 + \dots \frac{1}{n!}$$

$$= P.P^{-1} + \frac{1}{1!}P.D.P^{-1} + \frac{1}{2!}P.D^2.P^{-1} \dots \frac{1}{n}P.$$

$$= P.\left(I_3 + \frac{1}{1!}D + \frac{1}{2!}D^2 \dots \frac{1}{n!}D^n\right).P^{-1}$$

$$= P.T_n(D).P^{-1}$$

6)

$$T_n(D) = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{1!}\times(-2)+\frac{-4}{2!}\dots\frac{1}{n}(-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{1!}(-2)+\frac{1}{2!}(-2)^2\dots\frac{1}{n}(-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{1!}(4)+\frac{1}{2!}(4)^2\dots\frac{1}{n}(4)^n \end{pmatrix}$$

$\lim T_n(D)$

Posons

$$\alpha = 1+\frac{1}{1!}(-2)+\frac{1}{2!}(-2)^n \dots \frac{1}{n!}(-2)^n$$

$$\beta = 1+\frac{1}{1!}(4)+\frac{1}{2!}(4)^n \dots \frac{1}{n}(4)^n$$

$$\Rightarrow \lim T_n(D) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{+\infty}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \lim\limits_{+\infty}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lim\limits_{+\infty}\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$$

7) on a

$$T_n(A) = P\,.\,T_n(D)\,.\,P^{-1}$$

$$\lim_{+\infty} T_n(A) = P\,.\left(\lim_{+\infty} T_n(D)\right).\,P^{-1}$$

$$\lim_{+\infty} T_n(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & e^4 \\ -e^{-2} & -e^{-2} & e^4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{+\infty} T_n(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ e^4 - e^{-2} & e^4 + e^{-2} & e^4 - e^{-2} \\ -2e^{-2} + e^4 & e^4 - e^{-2} & e^4 + e^{-2} \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

Université Moulay-Ismaïl
F. S. T. Errachidia
Département de Mathématiques
Responsable : Prof. A. Sadrati

Année universitaire 2016-2017
Section : MIP S2
Module : M 124

EXAMEN D'ALGÈBRE (Rattrapage-Juillet 2017)

Durée : 1h30

Le sujet comporte 1 page. L'épreuve dure 1h30. Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdis.

Problème. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. soient $m \in \mathbb{R}$ et $f_m : E \longrightarrow E$ l'application linéaire définie par :

$$f_m(e_1) = me_1 + e_2 + e_3, \quad f_m(e_2) = e_1 + me_2 + e_3, \quad f_m(e_3) = e_1 + e_2 + me_3.$$

1. Écrire la matrice $A_m = M_B(f_m)$ de f_m dans la base B.
2. Calculer le déterminant $\det(A_m)$ de la matrice A_m.
3. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

On prendra dans toute la suite $m = 2$, et on écrira $f = f_2$ et $A = A_2$.

4. Déduire que l'endomorphisme f est bijectif, et déterminer la matrice $M_B(f^{-1})$ de l'endomorphisme f^{-1} dans B.
5. Trouver une base $\{u_1, u_2\}$ du sous-espace vectoriel $\ker(f - Id_E)$ où Id_E est l'endomorphisme identité de E.
6. Soit le vecteur $u_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de E.
7. Déterminer la matrice $D = M_{B'}(f)$ de f dans la base B'.
8. Calculer D^n pour $n \geq 1$.
9. Écrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.
10. Montrer que $\det(A^n) = \det(D^n)$ pour $n \geq 1$. En déduire la valeur de $\det(A^n)$.
11. Décomposer la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sous la forme $T = J + N$ avec J est une matrice diagonale et N une matrice dont la diagonale est nulle.
12. Calculer les puissances $N^2, N^3, N^4, \ldots$
13. En déduire T^n pour $n \geq 1$.

Scanned by TapScanner

Exam 16 — 17

Rattrapage

Problème :

1) on a

$$A_m = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|c} f_m(e_1) & f_m(e_2) & f_m(e_3) & \\ \end{array}$$

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

2) on a

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m+2 & m+2 & m+2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$= (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$= (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= (m+2)(m-1)^2$$

Scanned by TapScanner

3) on a

A_m est inversible $\Longleftrightarrow \det A_m \neq 0$

$\Longleftrightarrow (m+2)(m-1)^2 \neq 0$

$\Longleftrightarrow m \neq -2$ ou $m \neq 1$

4) ~~on a Bertendom~~

on a

$\det(A_2) = 4 \neq 0$

$\cancel{A} \Rightarrow A$ est inversible

$\Rightarrow f$ est Bijective

on a

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^{t}com(A)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

5) on a

$\mathrm{Ker}(f - Id_E)$

$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A - I_3)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x + y + z = 0$

$\Leftrightarrow z = -x - y$

$\Leftrightarrow E_{-1} = \{ (x, y, -x - y) / x, y \in \mathbb{R}^2 \}$

$E_{-1} = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$

$\Rightarrow U_1 = (1, 0, -1)$

$U_2 = (0, 1, -1)$

6) on a

$\mathrm{card}(B') = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ il suffit de montrer que B' est libre

soient λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$

- $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0$

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ B' est libre

$\Rightarrow$ B' est une base de $\mathbb{R}^3$

Scanned by TapScanner

$\Rightarrow B'$ est une base de $\mathbb{R}^3$

7) on a

$$f(u_1) = A \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= u_1$$

$$* f(u_2) = A \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= u_2$$

$$f(u_3) = A \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= 4 e_3$$

$\Rightarrow$ Alors

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

8) on a

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

9) on la matrice de passage de B à B' est

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

10)

on a

$$D = P^{-1} . A . P$$

$$\Rightarrow A = P . D . P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = P.D.\underbrace{P^{-1} \times P}_{I_3}.D.\underbrace{P^{-1} \cdots P}_{I_3}.D.P^{-1}$$

$$= P . D^n . P^{-1}$$

$\Rightarrow A^n$ et D^n sont semblables

$$\Rightarrow \det(A^n) = \det(D^n)$$

Alors

$$\det(A^n) = \det(D^n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{vmatrix}$$

$$= 4^n$$

Scanned by TapScanner

11) on a

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T = J + N$

12) —

on a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scanned by TapScanner

13)

On a

$$JN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2N$$

$$* \quad NJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2N$$

On a

$$T = J + N$$

$$T^n = (J+N)^n$$

$$= \sum_{K=0}^{n} C_n^K N^K J^{n-K}$$

on a

$$\forall p \geqslant 3 \quad N^p = 0$$

$$\Rightarrow T^n = \sum_{K=0}^{2} C_n^K N^K J^{n-K}$$

$$= C_n^0 N^0 J^n + C_n^1 N J^{n-1} + C_n^2 N^2 J^{n-2}$$

$$= J^n + n N J^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} N^2 J^{n-2}$$

Scanned by TapScanner

On a

$$NJ^{n-1} = NJ.J^{n-2}$$
$$= 2N.J^{n-2}$$
$$= 4N.J^{n-3}$$
$$= 8N.J^{n-4}$$

$$\Rightarrow NJ^{n-1} = 2^{n-1}N$$

$\Rightarrow$

$$T^n = J^n + n2^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} N.N.J^{n-2}$$
$$= J^n + n2^{n-1}.N + 2^{n-3}.n(n-1)N^2$$

$\Rightarrow$

$$T^n = J^n + n2^{n-1}.N + 2^{n-3}.n(n^2-1).N^2$$

toufik ouanzi

Scanned by TapScanner

that's it

43 T Technetium | 8 O Oxygen | 92 U Uranium | 9 F Fluorine | 53 I Iodine | 19 K Potassium

bon courage

0682930594

touanzi_2020

tou anzi

Dm me اي تساؤل

陶菲克