

Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$A(0,0,2)$, $B(2,0,0)$ et la sphère (S) de centre O et de rayon $R=2$

- 0.25 1) a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S)
- 0.5 b) Vérifier que les points A et B appartiennent à la sphère (S)
- 2) Soit I le milieu du segment $[AB]$.
- 0.25 a) Déterminer l'intersection du plan (OAB) avec la sphère (S)
- 0.5 b) Vérifier que $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ puis montrer que $d(O, (AB)) = \sqrt{2}$
- 3) On considère un point $M(0, m, 0)$ de l'espace, où $m \in \mathbb{R}$
- 0.5 a) Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$
- 0.25 b) Dédire que $mx + 2y + mz - 2m = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABM)
- 0.25 c) Montrer que $d(O, (ABM)) = \frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$
- 4) Le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r
- 0.5 Montrer que $r = \sqrt{2 + \frac{4}{2+m^2}}$ et déduire que $\sqrt{2} < r \leq 2$, pour tout $m \in \mathbb{R}$

Exercice 2 (3.5 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A ,

B , C , D et Ω d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = \bar{a}$, $c = \frac{3(3+i)}{2}$, $d = \frac{3(1+i)}{2}$ et $\omega = \frac{5}{2}$

- 0.5 1) a) Vérifier que $a + b = 2$ et déduire que l'affixe du point P , milieu du segment $[AB]$ est $p = 1$
- 0.5 b) Montrer que a et b sont les solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$
- 0.5 2) a) Vérifier que $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$
- 0.25 b) Dédire que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
- 0.25 3) a) Vérifier que $\frac{d-c}{a-b} = \frac{3}{4}i$
- 0.5 b) Montrer que $d - b = (c - a)e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis déduire que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires
- 4) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' . On pose $h(P) = G$
- 0.25 a) Vérifier que $z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
- 0.25 b) Montrer que l'affixe du point G est $g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i$
- 0.5 5) Montrer que les points Ω , G et D sont alignés.

Exercice 3 (2.5 points) :

Une urne contient six boules indiscernables au toucher :

Quatre boules blanches numérotées : 0 ; 1 ; 1 ; 1 et deux boules noires numérotées : 0 ; 1

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A « Les deux boules tirées portent le numéro 1 »

B « Les deux boules tirées sont de même couleur »

0.5 1) a) Montrer que $p(A) = \frac{2}{5}$

0.5 b) Montrer que $p(B) = \frac{7}{15}$

0.5 c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? justifier.

2) On répète l'expérience précédente trois fois successives. On considère la variable aléatoire X indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'événement A .

0.75 a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilités de X

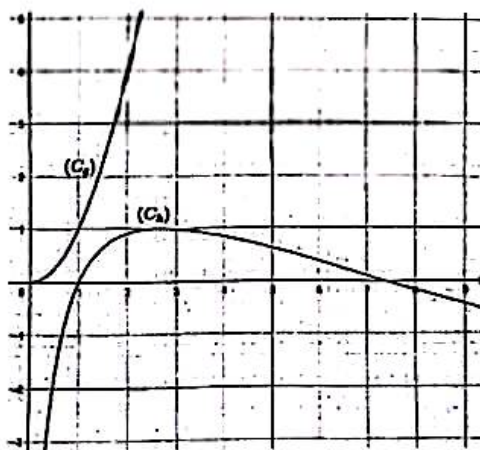
$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$			

0.25 b) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X

Problème (11 points) :

Partie I : Le graphique ci-contre représente les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions : $g : x \mapsto x^2$

et $h : x \mapsto 2 \ln x - (\ln x)^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ dans un même repère orthonormé.



0.25 1) a) Justifier graphiquement que pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$g(x) - h(x) > 0$$

0.5 b) Dédire que pour tout x de $]0, +\infty[$: $\frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$

0.5 2) a) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis déduire que $\int_1^e \ln(x) dx = 1 + e^2$

0.5 b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = 2e^2 - 2$

0.5 c) Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ et déduire les deux points d'intersection de la courbe (C_h) avec l'axe des abscisses.

0.5 d) Dédire, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_h) , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$

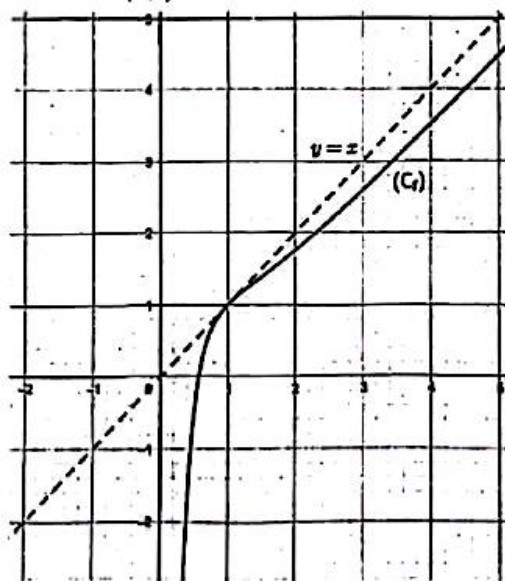
Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 0.5 1) a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.
- 0.5 b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser $t = \sqrt{x}$), puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0.5 c) Dédire que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 0.75 2) a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$
- 0.5 b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$
(On peut utiliser la question Partie I-1-b)
- 0.5 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
- 0.75 b) Vérifier que $e^{-1} < \alpha < 1$ et montrer que $\ln \alpha = -\alpha$.
- 0.25 c) Montrer que $f(x) \leq x$, pour tout $x \in]0, +\infty[$
- 0.5 d) Montrer que $y = x$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

4) Le graphique ci-contre représente la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]0, 1]$

- 0.5 a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
(Il n'est pas demandé de déterminer l'expression $\varphi^{-1}(x)$)
- 0.5 b) Montrer que φ^{-1} est dérivable en 0 et que
- $$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2 + 2\alpha}$$
- 0.75 c) Recopier la courbe de φ et construire la courbe de φ^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**Partie III :**

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$

- 0.5 1) Montrer par récurrence que $1 < u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$
- 0.5 2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question Partie II-3-c)
- 0.25 b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 0.5 c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 01

1) a) (S) est une sphère de centre $O(0;0;0)$ et de rayon $R=2$

Alors (S) : $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = R^2$

~~(S)~~ (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

1) b) * On a : $0^2 + 0^2 + 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow A(0;0;2) \in (S)$

* Et on a : $2^2 + 0^2 + 0^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow B(2;0;0) \in (S)$

2) a) On sait que A et B appartiennent à la sphère (S) et au plan (OAB).

Donc l'intersection de (S) et (OAB) est un cercle de centre O et de rayon $R=2$ (Même centre et même rayon que (S)).

2) b). I est le milieu du segment [AB]

Alors $I\left(\frac{0+2}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{2+0}{2}\right)$ c-à-d $I(1;0;1)$

On a $A(0;0;2)$; $B(2;0;0)$ et $I(1;0;1)$

Alors $\vec{AB}(2;0;-2)$ et $\vec{OI}(1;0;1)$

$\Rightarrow \vec{OI} \cdot \vec{AB} = 2 \times 1 + 0 \times 0 - 2 \times 1 = 2 + 0 - 2 = 0$

D'où $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = 0$.

Puisque $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = 0$, alors $(OI) \perp (AB)$

Or I est le milieu du segment [AB], alors $I \in (AB)$

Ce qui montre que I est le projeté orthogonal de O sur (AB).

Et par suite $d(O; (AB)) = OI = \|\vec{OI}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}$

D'où $d(O; (AB)) = \sqrt{2}$.

3) a) On a : $M(0;m;0)$; $A(0;0;2)$ et $B(2;0;0)$

Donc $\vec{AB}(2;0;-2)$ et $\vec{AM}(0;m;-2)$

$\Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & m & -2 \end{vmatrix} = (0+2m)\vec{i} - (-4+0)\vec{j} + (2m-0)\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$.

3) b) Puisque $\vec{AB} \wedge \vec{AM} \neq \vec{0}$, alors $\vec{AB} \wedge \vec{AM}(2m; 4; 2m)$

est un vecteur normal au plan (ABM).

Alors $(ABM): 2mx + 4y + 2mz + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

Puisque $A(0;0;2) \in (ABM)$; alors $2m \times 0 + 4 \times 0 + 2m \times 2 + d = 0$
 $c - \bar{a} - d \quad 4m + d = 0$

$c - \bar{a} - d \quad d = -4m.$

D'où $(ABM): 2mx + 4y + 2mz - 4m = 0$

$c - \bar{a} - d \quad (ABM): mx + 2y + mz - 2m = 0$

3)c) On sait que $d(O; (ABM)) = \frac{|m \times 0 + 2 \times 0 + m \times 0 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 2^2 + m^2}}$

$= \frac{|-2m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}$

$= \frac{|-2| |m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}$

$= \frac{2|m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}$

4) Le rayon r vérifie la relation: $r = \sqrt{R^2 - (d(O; (ABM)))^2}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{4 - \frac{4m^2}{4 + 2m^2}}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{2 + 2 - \frac{4m^2}{4 + 2m^2}}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{2 + \frac{8 + 4m^2 - 4m^2}{4 + 2m^2}}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{2 + \frac{4 \times 2}{2(2 + m^2)}}$

D'où $r = \sqrt{2 + \frac{4}{2 + m^2}}$

• Puisque $(ABM) \cap (S) = (\Gamma_m)$

Alors le rayon r de (Γ_m) doit être inférieur ou égal à R ; le rayon de la sphère (S) .

ça veut dire que : $r \leq R \Leftrightarrow \boxed{r \leq 2} *$

• D'autre par; on sait que $(\forall m \in \mathbb{R}); \frac{4}{2+m^2} > 0$

$$\text{Donc } 2 + \frac{4}{2+m^2} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{2 + \frac{4}{2+m^2}} > \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r > \sqrt{2}} **$$

de * et **; on obtient :

$$\sqrt{2} < r \leq 2$$

Exercice 02 :

$$1) a) \text{ On a: } a+b = 1+2i + (1-2i) = 1+2i+1-2i = 2 \\ \Rightarrow \boxed{a+b=2}$$

* on sait que $P(p)$ est le milieu du segment $[AB]$

$$\text{Alors } p = \frac{a+b}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$1) b) \text{ L'équation } z^2 - 2z + 5 = 0 \text{ a pour discriminant :}$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$$

Puisque $\Delta < 0$, alors cette équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{-(-2) + i\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i = a \quad \text{et} \quad \frac{-(-2) - i\sqrt{16}}{2 \times 1} = \bar{a}$$

c-à-d ses solutions dans $\mathbb{C}$ sont a et $b = \bar{a}$.

$$2) a) \text{ On a: } * |w-a| = \left| \frac{5}{2} - 1 - 2i \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right|$$

$$* |w-b| = \left| \frac{5}{2} - 1 + 2i \right| = \left| \frac{3}{2} + 2i \right|$$

$$* |w-c| = \left| \frac{5}{2} - \frac{3(3+i)}{2} \right| = \left| -2 - \frac{3}{2}i \right|$$

on remarque que $w-b = \overline{w-a}$ et $w-c = -i(w-a)$ Donc $|w-b| = |w-a|$ et $|w-c| = |-i| |w-a| = |w-a|$ D'où $|w-a| = |w-b| = |w-c|$

$$2) b) \text{ On a } |w-a| = |w-b| = |w-c|$$

$$\Leftrightarrow A\Omega = B\Omega = C\Omega$$

D'où Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) .

$$3) a) \text{ On a: } \frac{d-c}{a-b} = \frac{\frac{3-i}{2} - \frac{3(3+i)}{2}}{a-\bar{a}} \\ = \frac{-6}{2i \operatorname{Im}(a)}$$

$$= \frac{-3}{2i \times 2}$$

$$= \frac{-3}{4i}$$

$$\text{Donc } \frac{d-c}{a-b} = \frac{-3 \times i}{4i \times i} = \frac{-3i}{-4} = \frac{3}{4}i$$

$$\text{D'où } \frac{d-c}{a-b} = \frac{3}{4}i$$

$$3)b) \text{ on a } d-b = \frac{3(1+i)}{2} - (1-2i)$$

$$= \frac{3+3i-2+4i}{2}$$

$$= \frac{1+7i}{2}$$

$$\text{et } (c-a)e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3(3+i)}{2} - (1+2i) \right) e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{9+3i-2-4i}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{7-i}{2} \times i$$

$$= \frac{7i-i^2}{2}$$

$$= \frac{1+7i}{2}$$

$$\text{D'où } d-b = (c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\ast \text{ on a } \frac{d-b}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (\text{remarquons que } c \neq a)$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{d-b}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{D'où } (AC) \perp (BD)$$

$$4)a) \text{ on a } h(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{2}{3}(z-f) + f$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}f + f$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}f$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{2}{3}z + \frac{3+i}{2}$$

$$\text{D'où } z^* = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

$$4) b) \text{ On a: } R(p) = G \Leftrightarrow g = \frac{2}{3}p + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow g = \frac{2}{3} \times 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow g = \frac{4+9}{6} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{D'où } g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i.$$

$$5) \text{ On a: } \frac{g-w}{d-w} = \frac{\frac{13}{6} + \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{5}{2}} = \frac{-\frac{2}{6} + \frac{1}{2}i}{-1 + \frac{3}{2}i}$$

$$\Rightarrow \frac{g-w}{d-w} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i}{-1 + \frac{3}{2}i} = \frac{\frac{1}{3}(-1 + \frac{3}{2}i)}{-1 + \frac{3}{2}i} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{or } \frac{1}{3} \in \mathbb{R}^*$$

D'où $\mathcal{R}$, G et D sont alignés.

Exercice 03.

Soit $\mathcal{E}$ l'univers de l'expérience aléatoire considérée.

$$\text{Alors } \text{Card}(\mathcal{E}) = C_6^2 = \frac{1 \times 5}{2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = \frac{30}{2} = 15.$$

$$1) a) \Rightarrow P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\mathcal{E})} = \frac{C_4^2}{15} = \frac{\frac{1 \times 3}{2!}}{15} = \frac{\frac{4 \times 3}{2}}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$1) b) \text{ et } P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\mathcal{E})} = \frac{C_4^2 + C_2^2}{15} = \frac{6+1}{15} = \frac{7}{15}$$

$$1) c) \text{ On a } P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\mathcal{E})} = \frac{C_3^2}{15} = \frac{C_3^1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\text{or } P(A) \times P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{15} = \frac{14}{75}$$

$$\text{Alors } P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

D'où A et B ne sont pas indépendants.

$$2) a) P(X=1) = C_3^1 (P(A))^1 (1-P(A))^2 = 3 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$$

$$* P(X=2) = C_3^2 (P(A))^2 (1-P(A))^1 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$$

$$* P(X=3) = C_3^3 (P(A))^3 (1-P(A))^0 = 1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

D'où la loi de probabilité de X est :

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$$2) b) E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i P(X=x_i)$$

$$= 0 \times \frac{27}{125} + 1 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 3 \times \frac{8}{125}$$

$$= \frac{54 + 72 + 24}{125}$$

$$= \frac{150}{125}$$

$$= \frac{25 \times 6}{25 \times 5}$$

$$= \frac{6}{5}$$

Autre méthode : on remarque que X est une variable aléatoire binomiale de paramètre $n=3$ et $p=P(A)$

$$\text{donc } E(X) = n.p = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

Problème :

Partie I

1) a) Graphiquement, on remarque que (ε_3) est au-dessus de (ε_2) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Donc $(\forall x \in]0; +\infty[); g(x) - h(x) > 0$.

1) b) on a : Pour tout $x \in]0; +\infty[; g(x) - h(x) > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\ln x + (\ln x)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x - (\ln x)^2 < x^2$$

et puisque $x^2 > 0$ (car $x \in]0; +\infty[$).

$$\text{Alors } \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < \frac{x^2}{x^2}$$

$$\text{c-à-d } \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$$

2) a) On a $H: x \mapsto x \ln x - x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.
car c'est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$: $x \mapsto -x$ (P. Polynôme) et $x \mapsto x \ln x$ (Produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ ($x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$)).

$$\begin{aligned} \text{et on a } (\forall x \in \mathbb{R}_+^*); H'(x) &= (x)' \ln x + x (\ln x)' - (x)' \\ &= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

D'où H est une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} \ln x \, dx &= [x \ln x - x]_1^{e^2} = e^2 \ln(e^2) - e^2 - 1 \ln(1) + 1 \\ &= 2e^2 - e^2 - 0 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \int_1^{e^2} \ln x \, dx = e^2 + 1$$

2)b) Soit $\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx$.

on pose $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases}$ on choisit $u(x) = x$
 $\Rightarrow v'(x) = 2x \frac{1}{x} \cdot \ln x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx &= [x (\ln x)^2]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \times 2x \frac{1}{x} \cdot \ln x dx \\ &= [x (\ln x)^2]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2 \ln x dx \\ &= e^2 (\ln(e^2))^2 - 1 (\ln(1))^2 - 2 \int_1^{e^2} \ln x dx \\ &= e^2 \times 4 - 0 - 2(e^2 + 1) \\ &= 4e^2 - 2e^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx = 2e^2 - 2.$$

2)c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \ln x - (\ln x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x (2 - \ln x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ou } 2 - \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e^2 \end{aligned}$$

D'où 1 et e^2 sont les solutions de l'équation

$$h(x) = 0$$

et par suite $(\mathcal{E}_h)$ coupe l'axe des abscisses aux points $O(0,0)$ et $A(e^2, 0)$.

2)d) L'aire demandée est : $A = \int_1^{e^2} |h(x)| dx$ (u.a).

$$\Rightarrow A = \int_1^{e^2} h(x) dx \text{ (u.a)}$$

Car $(\mathcal{E}_h)$ se trouve au dessus de l'axe des abscisses sur $[1, e^2]$ ce qui donne $\forall x \in [1, e^2]; h(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \int_1^{e^2} (2 \ln x - (\ln x)^2) dx \text{ (u.a)} \\ &= \left[2 \int_1^{e^2} \ln x dx - \int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx \right] \text{ (u.a)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = [2(1+e^2) - (2e^2 - 2)] \text{ (u.a.)}$$

$$\Rightarrow A = (2 + 2e^2 - 2e^2 + 2) \text{ (u.a.)}$$

$$\Rightarrow A = 4 \cdot \text{(u.a.)}$$

Remarque : (u.a.) est l'unité d'aire.

Partie II.

$$1) a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} -(\ln x)^2 = -\infty$$

D'où (E_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées).

$$1) b). \text{ On pose } t = \sqrt{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(t^2))^2}{t^2}$$

$$\left(\begin{array}{l} t^2 = x \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty \end{array} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{\ln(t)}{t} \right)^2 = 0$$

$$\text{Car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

$$1) c) \text{ On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

D'où La droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique de (E_f) au voisinage de $+\infty$.

2) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{x}$.

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; f'(x) = 1 - \frac{2x^{\frac{1}{2}} \ln x + x - 1x(\ln x)^2}{x^2}$

$$2)b) \text{ On a } (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$$
$$= 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$\text{Donc } 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

D'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3)a). On a f est dérivable sur $]0; +\infty[\Rightarrow f$ est continue sur $]0; +\infty[$.

$$\bullet \text{ et on a } f(]0; +\infty[) = \bigcup_{x \rightarrow 0^+} f(x) ; \bigcup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \mathbb{R}$$

Car f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\Rightarrow 0 \in f(]0; +\infty[) \text{ car } 0 \in \mathbb{R}.$$

$\bullet$ de plus f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$.

$$3)b). \text{ On a } f(e^{-1}) = e^{-1} - \frac{1}{e^{-1}} = \frac{1}{e} - e < 0 \quad \left(\frac{1}{e} < e\right)$$

$$\text{et on a } f(1) = 1 - \frac{0}{1} = 1 > 0$$

$$\text{Donc } f(1) \times f(e^{-1}) < 0$$

et en utilisant la question 3)a), on en déduit que :

$e^{-1} < \alpha < 1$ D'après le théorème des valeurs intermédiaires.

$$\bullet \text{ On a } f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \frac{(\ln \alpha)^2}{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = (\ln \alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \ln \alpha \text{ ou } \alpha = -\ln \alpha$$

or $e^{-1} < \alpha < 1 \Leftrightarrow -1 < \ln \alpha < 0$; Donc $\alpha = \ln \alpha$ est impossible

$$\text{D'où } \ln \alpha = -\alpha$$

3) c) Soit $x \in]0; +\infty[$.

$$\text{On a } f(x) - x = x - \frac{(\ln x)^2}{x} - x = - \frac{(\ln x)^2}{x}$$

Puisque $x > 0$ et $(\ln x)^2 \geq 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Alors $f(x) - x \leq 0$ ~~car~~ $f(x) \leq x$. $\square$

3) d) on sait que $(\tau): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$\Leftrightarrow (\tau): y = 1(x-1) + 1$$

$$\text{c-à-d } (\tau): y = x$$

4) a) On a φ est continue sur $]0; 1]$ car c'est la restriction de f qui est continue sur $]0; +\infty[$.

et puisque f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$,

Alors sa restriction φ est strictement croissante sur $]0; 1]$

D'où φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur

$$J = \varphi(]0; 1]) = f(]0; 1]) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); f(1)] =]-\infty; 1]$$

4) b) On a $f(x) = 0$ et f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$\Rightarrow f$ est dérivable en x (car $x \in]0; +\infty[$).

et puisque φ est la restriction de f sur $]0; 1]$ et $\frac{1}{e} < x < 1 \Rightarrow x \in]0; 1]$ (car $]\frac{1}{e}; 1[\subset]0; 1]$).

Alors $\varphi(x) = 0$ et φ est dérivable en x .

$$\text{et on a } \varphi'(x) = f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{-2x - x^2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + x^2}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{2x + 2}{x} \Rightarrow \varphi'(x) \neq 0 \text{ car } x \neq -1 \left(\frac{1}{e} < x < 1 \right)$$

D'où φ^{-1} est dérivable en 0, et on a:

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(0))} = \frac{1}{\varphi'(x)} = \frac{x}{2x + 2}$$

Partie III :

1) Pour $n=0$, on a $u_0 = e$ Alors $1 < u_0$
c-à-d la proposition est vraie pour $n=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 < u_n$ et montrons que:
 $1 < u_{n+1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $1 < u_n$
et puisque f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
Alors $f(1) < f(u_n)$

$$\Leftrightarrow 1 < u_{n+1} \quad (f(1)=1 \text{ et } f(u_n) = u_{n+1})$$

D'où d'après le principe de récurrence :
 $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 < u_n$.

2)a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question II-3.c, on a : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f(x) \leq x$.
or $u_n \in]0; +\infty[$, car $u_n > 1$ (question III.1)

$$\text{Alors } f(u_n) \leq u_n$$

$$\text{c-à-d } u_{n+1} \leq u_n$$

D'où (u_n) est une suite décroissante.

2)b) Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, alors elle est convergente.

2)c) $\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \text{ est continue sur }]0; +\infty[\text{ en particulier sur }]1; +\infty[\\ \bullet f(]1; +\infty[) =]1; +\infty[\Rightarrow f(]1; +\infty[) \subset]1; +\infty[. \end{array} \right.$
on a : $\left\{ \begin{array}{l} \bullet u_0 \in]1; +\infty[. \text{ Car } u_0 = e. \\ \bullet (u_n) \text{ est convergente.} \end{array} \right.$

Alors la limite de (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$.
on a $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$ (l'intersection de (φ) et la droite
d'équation $y = x$ est un point d'abscisse 1) $\Rightarrow \lim (u_n) = 1$

4)c) $(\mathcal{E}_{\varphi^{-1}})$ et $(\mathcal{C}_{\varphi})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

