



***Corrigé de l'épreuve de Maths
Examen Examen National
Le 05-06-2025***

2^{ème} année Sciences Mathématiques

Corrigé réalisé par

Mr.EL ABBASSI Mohammed

Professeur de Mathématiques

Au lycée Elbilialia- Khouribga

NB : Généralement les sujets qu'on propose aux examens nationaux sont relativement longs.

Ils demandent de la vitesse dans la réflexion et dans la rédaction. Ils demandent aussi d'avoir de la tactique et du savoir faire.
Les questions types doivent être connues par cœur.

Exercice 1

Partie I

1)a- Montrer que $(\forall x \in \mathbf{R}): 1+x \leq e^x$

Considérons la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par : $h(x) = e^x - (1+x)$

La fonction h est dérivable sur $\mathbf{R}$ par : $h'(x) = (e^x)' - (1+x)' = e^x - 1$

D'où le tableau des signes de h' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+

Donc la fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Donc $h(0)$ c.à.d 0 est la valeur minimale absolue de h sur $\mathbf{R}$.

On en déduit que l'on a : $(\forall x \in \mathbf{R}): 0 \leq h(x)$. Et par suite, on a : $(\forall x \in \mathbf{R}): 1+x \leq e^x$.

1) b- Dédisons que l'on a : $(\forall x \in [0, +\infty[): \frac{x^2}{2} + 1 + x \leq e^x$

Soit $x \in [0, +\infty[$, on a : $(\forall t \in [0, x]) : 1+t \leq e^t$ et comme la fct : $t \mapsto 1+t$ et la fct : $t \mapsto e^t$ sont continue sur $\mathbf{R}$ et en particulier sur le segment $[0, x]$ et comme $0 \leq x$ alors $\int_0^x (1+t) dt \leq \int_0^x e^t dt$

et comme $\int_0^x (1+t) dt = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_0^x = x + \frac{x^2}{2}$ et $\int_0^x e^t dt = [e^t]_0^x = e^x - 1$

Et par suite, on a : $\frac{x^2}{2} + 1 + x \leq e^x$.

2) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $I(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$

2)a- Soit $x \in [0, +\infty[$, montrons que $I(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

On a, $(\forall t \in [0, x]) : e^{-t} \leq 1$ et comme $(\forall t \in [0, x]) : 0 \leq t$ alors on a, $(\forall t \in [0, x]) : t e^{-t} \leq t$ et comme la fct : $t \mapsto t$ et la fct : $t \mapsto t e^{-t}$ sont continue sur $\mathbf{R}$ et en particulier sur le segment $[0, x]$ et comme $0 \leq x$ alors $\int_0^x t e^{-t} dt \leq \int_0^x t dt$.

et comme $I(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$ et $\int_0^x t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2}$ alors, on a : $I(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

2)b- Soit $x \in [0, +\infty[$, montrons que $I(x) = -x e^{-x} - e^{-x} + 1$.

On a :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x t e^{-t} dt = \int_0^x t (-e^{-t})' dt = [-t e^{-t}]_0^x - \int_0^x t' (-e^{-t}) dt = -x e^{-x} - \int_0^x -e^{-t} dt \\ &= -x e^{-x} - [e^{-t}]_0^x = -x e^{-x} - e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

3) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

3)a- Soit $x \in]0, +\infty[$, montrons que $\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}$.

On a, d'après I)1)b : $\frac{x^2}{2} \leq e^x - x - 1$ et d'après I)2)a et I)2)b : $-xe^{-x} - e^{-x} + 1 \leq \frac{x^2}{2}$ et en

multipliant les deux membres de cette deuxième inégalité par e^x on obtient : $-x - 1 + e^x \leq \frac{x^2}{2} e^x$

En combinant entre les deux et en divisant les trois membres par x^2 on obtient : $\frac{x^2}{2} \leq e^x - x - 1 \leq \frac{e^x}{2}$

$$\text{c.à.d. } \frac{x^2}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}.$$

3)b- On d'après la question précédente, $(\forall x \in]0, +\infty[) : \frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

$$\text{Alors on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2}.$$

Partie II

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}$, si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

$$1) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{xe^x}} = 0 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ alors la courbe (C) admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

$$2) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^x \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)} = \frac{1}{2} = f(0) \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \text{ (on pose } t = 2x))$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} = 1).$$

Donc f est continue à droite en 0.

3)a- Soit $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x} = \frac{x}{e^x - e^{-x}} \left(1 - \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \right) \frac{1}{x} = f(x) \left(\frac{2x - e^x + e^{-x}}{2x} \right) \frac{1}{x} \\ &= f(x) \left(\frac{2x - e^x + e^{-x}}{2x} \right) \frac{1}{x} = -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right) \end{aligned}$$

3)b- Soit $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} &= \frac{e^{2x} - 2x - 1 + 2x - 2xe^x}{2x^2} = 2 \frac{e^{2x} - 2x - 1}{(2x)^2} - \frac{2xe^x - 2x}{2x^2} \\ &= 2g(2x) - \frac{2x(e^x - 1)}{2x^2} = 2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x} \end{aligned}$$

$$3)c- \text{ On a , } (\forall x \in]0, +\infty[) : \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right) = -e^{-x} f(x) \left(2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x} \right)$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} -e^{-x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(2x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \frac{1}{2}$ (on pose $t = 2x$)

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbf{R}$, donc f est dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0) = 0$.

$$1) \quad 4) \text{ Pour tout } x \in [0, +\infty[, \text{ on pose } J(x) = \int_0^x te^t dt$$

4)a- Soit $x \in]0, +\infty[$, montrons que : $0 \leq I(x) \leq J(x)$.

Comme $(\forall t \in [0, x]) : -t \leq t$ alors $0 < e^{-t} \leq e^t$ et comme $(\forall t \in [0, x]) : 0 \leq t$ alors on a ,
 $(\forall t \in [0, x]) : 0 \leq te^{-t} \leq te^t$

et comme la fct : $t \mapsto te^{-t}$ et la fct : $t \mapsto te^t$ sont continue sur $\mathbf{R}$ et en particulier sur le segment $[0, x]$ et comme $0 \leq x$ alors $0 \leq \int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x te^t dt$ c.à.d $0 \leq I(x) \leq J(x)$.

4)b- Soit $x \in [0, +\infty[$, montrons que $J(x) = (x-1)e^x + 1$.

On a :

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^x te^t dt = \int_0^x t(e^t)' dt = [te^t]_0^x - \int_0^x t'(e^t) dt = xe^x - \int_0^x e^t dt \\ &= xe^x - [e^t]_0^x = xe^x - e^x + 1 = (x-1)e^x + 1 \end{aligned}$$

4)c- Montrons que $(\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$.

$$\text{On a , } (\forall x \in]0, +\infty[) : f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}.$$

Comme la fct : $x \mapsto x$ et la fct : $x \mapsto e^x - e^{-x}$ sont dérivable sur $\mathbf{R}$ et en particulier sur $]0, +\infty[$

Et comme $(\forall x \in]0, +\infty[) : e^x - e^{-x} \neq 0$ alors la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} \right)' = \frac{x'(e^x - e^{-x}) - x(e^x - e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{e^x - e^{-x} - x(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\text{D'autre part, on a : } I(x) - J(x) = (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) - (xe^x - e^x + 1) = e^x - e^{-x} - x(e^x + e^{-x})$$

$$\text{Donc on a , } (\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

4)d- On a , $(\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$ et comme $(\forall x \in]0, +\infty[) : (e^x - e^{-x})^2 > 0$ et

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : I(x) - J(x) \leq 0 \text{ (d'après II) 4)a-) alors on a , } (\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) \leq 0$$

Donc f est décroissante sur $]0, +\infty[$ et comme elle est continue à droite en 0 alors elle est décroissante sur $[0, +\infty[$.

5) Pour la bijection nous aurons besoin de la strict monotonie de f sur $[0, +\infty[$.

D'après la question précédente on a f est décroissante sur $[0, +\infty[$, nous allons montrer qu'elle est en fait strictement décroissante.

Pour cela, montrons la propriété suivante :

Si h est une fonction continue sur un intervalle I et si $(\forall x \in I) : h(x) > 0$ alors on a,

$$(\forall (a, b) \in I^2 / a < b) : \int_a^b h(x) dx > 0.$$

Preuve Soit H une primitive de h sur I . On a : $(\forall x \in I) : H'(x) = h(x) > 0$, donc H est strictement croissante sur I , donc pour tout $(a, b) \in I^2$, si $a < b$ alors $H(b) - H(a) > 0$ et comme

$$\int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a) \text{ alors on a : } \int_a^b h(x) dx > 0.$$

$$\text{On a, } (\forall x \in]0, +\infty[) (\forall c \in]0, x[) : J(x) - I(x) = \int_0^x t(e^t - e^{-t}) dt = \int_0^c t(e^t - e^{-t}) dt + \int_c^x t(e^t - e^{-t}) dt$$

Et comme $(\forall x \in]0, +\infty[) (\forall c \in]0, x[) (\forall t \in [c, x]) : t(e^t - e^{-t}) > 0$ et la fct : $t \mapsto t(e^t - e^{-t})$ est continue sur $\mathbf{R}$ (et en particulier sur tout intervalle de $\mathbf{R}$) alors on a,

$$(\forall x \in]0, +\infty[) (\forall c \in]0, x[) : \int_c^x t(e^t - e^{-t}) dt > 0. \text{ Et comme } (\forall x \in]0, +\infty[) (\forall c \in]0, x[)$$

$$\int_0^c t(e^t - e^{-t}) dt = J(c) - I(c) \geq 0 \text{ alors on a, } (\forall x \in]0, +\infty[) : \int_0^x t(e^t - e^{-t}) dt \text{ c.à.d on a :}$$

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : J(x) - I(x) > 0. \text{ Et comme } (\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2} \text{ alors on a}$$

$(\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et comme elle est continue à droite en 0 alors elle est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

On a f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et comme f est continue sur $[0, +\infty[$ (car dérivable) alors f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers l'intervalle $J = f(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right[= \left] 0, \frac{1}{2} \right[$

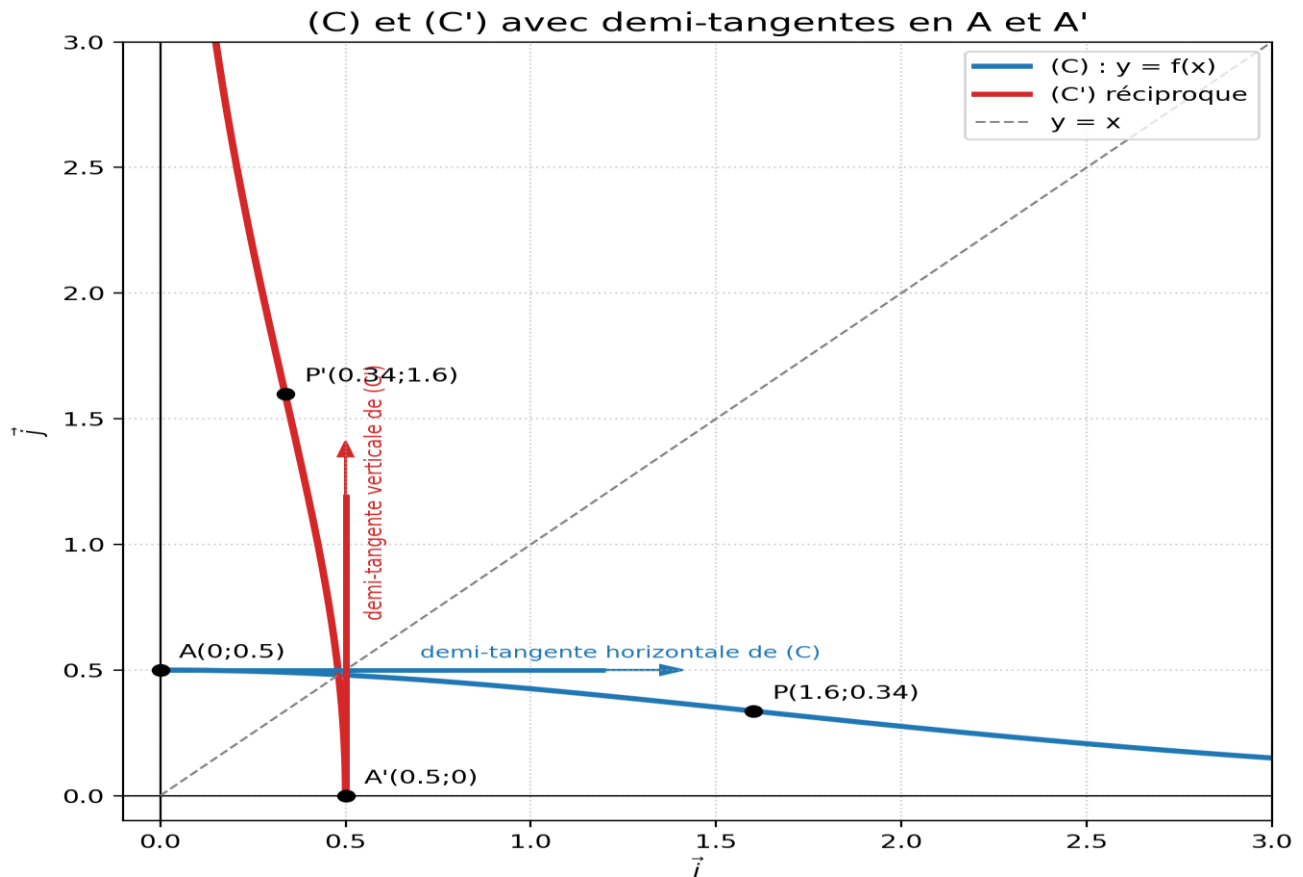
6) a-M.q l'équt : $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$ (à déterminer). On a, $(\forall x \in]0, +\infty[)$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x - e^{-x}} = x \\ &\Leftrightarrow x \left(\frac{1 - e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - e^x + e^{-x} = 0 \text{ (car } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 1 = 0 \text{ (en multipliant les deux membres par } e^x) \\ &\Leftrightarrow \left(e^x - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{5}{4} \\ &\Leftrightarrow e^x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (car } e^x - \frac{1}{2} > 0, \text{ puisque } x > 0 \Rightarrow e^x > 1) \\ &\Leftrightarrow x = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

Et comme $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ alors $\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$

Et par suite l'équation : $f(x) = x$ admet une solution unique dans $]0, +\infty[$ qui est $\alpha = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

6)b- Représentation graphique de f et f^{-1} .



7) $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$.

a-Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Pour $n=0$, on a : $u_0 = 0$ et comme $0 \leq 0 \leq \frac{1}{2}$ alors $0 \leq u_0 \leq \frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

On a selon l'hypothèse de récurrence $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ et comme f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

alors on a : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(0)$ et comme $f(0) = \frac{1}{2}$ et $0 \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ alors

on a : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

On conclut d'après le principe de récurrence que l'on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

7)b- En admettant que $(\forall x \in]0, +\infty[) : -\frac{1}{2} < f'(x) < 0$ montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

Comme f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\forall x \in]0, +\infty[) : |f'(x)| < \frac{1}{2}$ alors d'après le TIAF on a :

$(\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2) : |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$ et comme $\alpha \in]0, +\infty[$ et $u_n \in]0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors on a, $(\forall n \in \mathbb{N}) : |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ et comme $f(\alpha) = \alpha$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(u_n) = u_{n+1}$ alors on a, $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

7)c- Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Pour $n=0$, on a : $u_0 = 0$ donc $|u_0 - \alpha| = \alpha$ (car $\alpha > 0$) et comme $0 < \alpha$ et f strictement croissante sur $[0, +\infty[$ alors $f(\alpha) < f(0)$ et comme $f(\alpha) = \alpha$ et $f(0) = \frac{1}{2}$ alors $\alpha < \frac{1}{2}$ et comme $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ alors $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$. Donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On a, selon l'hypothèse de récurrence $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et comme $0 < \frac{1}{2}$ alors on a : $\frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et comme d'après la question précédente $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ alors on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On conclut d'après le principe de récurrence que l'on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

7)d- Comme d'après la question précédente $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

Alors la suite (u_n) est convergente et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Partie III

$$(\forall x \in [0, +\infty[) : F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

1)a- Soit $x \in]0, +\infty[$, on a $(\forall t \in [x, 2x]) : x \leq t$ et f strictement croissante sur $[0, +\infty[$ alors $(\forall t \in [x, 2x]) : f(t) \leq f(x)$ et comme f est positive sur $[0, +\infty[$ alors on a $(\forall t \in [x, 2x]) : 0 \leq f(t) \leq f(x)$ et comme f est continue sur $[0, +\infty[$ et $x \leq 2x$ alors on a : $0 \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq f(x)(2x - x)$ c.à.d $0 \leq F(x) \leq xf(x)$.

1)b- On a $(\forall x \in]0, +\infty[) : 0 \leq F(x) \leq xf(x)$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \frac{1}{1 - e^{-2x}} = 0$

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

1)c- Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale de (C_F) au voisinage de $+\infty$.

2)a-Montrons que F est dérivable sur $[0, +\infty[$.

On a f est continue sur $[0, +\infty[$, soit G une primitive de f sur $[0, +\infty[$.

On a, $(\forall x \in [0, +\infty[): F(x) = G(2x) - G(x)$.

Comme la fonction : $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et la fonction G est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $(\forall x \in [0, +\infty[): 2x \in [0, +\infty[$ alors la fonction : $x \mapsto G(2x)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ (composée de deux fonctions dérivables) donc F est dérivable sur $[0, +\infty[$ (somme de deux fonctions dérivables).

2)b- On a, $(\forall x \in [0, +\infty[): F'(x) = (G(2x))' - G'(x) = (2x)' G'(2x) - G'(x) = 2f(2x) - f(x)$

$$\text{Et comme } (\forall x \in]0, +\infty[); 2f(2x) - f(x) = \frac{4x}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{x}{e^x - e^{-x}}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1) &= \frac{-x}{e^x - e^{-x}} (e^{2x} - 4e^x + 1) = \frac{-x}{(e^{2x} + 1)(e^x - e^{-x})} e^x (e^x - 4 + e^{-x}) \\ &= \frac{x}{e^x (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})} e^x (4 - (e^x + e^{-x})) \\ &= \frac{4x}{e^{2x} + e^{-2x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})} = \frac{4x}{e^{2x} + e^{-2x}} - \frac{x}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

Alors on a $(\forall x \in]0, +\infty[): F'(x) = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1)$. Et comme $F'(0) = 2f(0) - f(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et

$$\frac{-f(0)}{e^{2 \times 0} + 1} (e^{2 \times 0} - 4e^0 + 1) = \frac{-\frac{1}{2}}{2} \times (-2) = \frac{1}{2} \text{ alors on a : } (\forall x \in [0, +\infty[): F'(x) = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1).$$

2)c-Montrons que $F(\ln(2 + \sqrt{3}))$ est un extremum de F sur $[0, +\infty[$.

Comme F est dérivable sur $[0, +\infty[$ alors il suffit de montrer que sa fonction dérivée F' s'annule en $\ln(2 + \sqrt{3})$ en changeant de signe.

D'après la question précédente, on a : $(\forall x \in [0, +\infty[): F'(x) = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1)$.

Et comme $(\forall x \in [0, +\infty[): \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} < 0$ alors le signe $F'(x)$ est contraire à celui de $e^{2x} - 4e^x + 1$

$$\text{On a } (\forall x \in [0, +\infty[): e^{2x} - 4e^x + 1 = (e^x - 2)^2 - 3 = (e^x - (2 + \sqrt{3}))(e^x - (2 - \sqrt{3})) = (e^x - e^\beta)(e^x - e^\gamma)$$

Avec $\beta = \ln(2 + \sqrt{3})$ et $\gamma = \ln(2 - \sqrt{3})$. Comme $\gamma < 0$ et $x > 0$ alors $(e^x - e^\gamma) > 0$ donc le signe $F'(x)$ est celui de $(e^x - e^\beta)$. Tableau des signes de $F'(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$:

x	0	β	
$e^x - e^\beta$	-	0	+
$F'(x)$	-	0	+

Comme F' s'annule en β en changeant de signe du positif au négatif alors β c.à.d $\ln(2+\sqrt{3})$ est un maximum de la fonction F .

Exercice 2

Soit $m \in \mathbf{C} / m = \sqrt{2}e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbf{Z}\}$

$$\text{Donc } \overline{m}m = |m|^2 = 2$$

Partie I

$$(E_m): \overline{m}z^2 - 2z + m = 0$$

$$\text{Posons } Z_1 = \frac{m(1-i)}{2}$$

1) Sachant que Z_1 est une solution de (E_m) déduisons que sa deuxième solution est : $Z_2 = \frac{m(1+i)}{2}$

$$\text{On sait que si } Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ sont les solutions de } (E_m) \text{ alors } Z_1 + Z_2 = -\frac{-2}{\overline{m}} = \frac{2m}{|m|^2} = \frac{2m}{2} = m$$

$$\text{Donc } Z_2 = m - Z_1 = m - \frac{m}{2}(1-i) = \frac{m}{2}(1+i).$$

$$2) \text{ On a : } Z_1 = \frac{m}{2}(1-i) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta} \right) \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{2}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Partie II

$$A(a), B(b), M(m), M_1(z_1) \text{ et } M_2(z_2), \text{ avec } a=1 \text{ et } b=-1. R = r\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

1) Montrer que $R(M_1) = M_2$

Posons : $R(M_1) = M'_1$ et montrons que $M'_1 = M_2$.

On a :

$$R(M_1) = M'_1 \Leftrightarrow z_{M'_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_{M_1} - z_O) + z_O$$

$$\Leftrightarrow z_{M'_1} = iz_{M_1}$$

$$\Leftrightarrow z_{M'_1} = i \frac{m}{2}(1-i)$$

$$\Leftrightarrow z_{M'_1} = \frac{m}{2}(1+i) = z_{M_2}$$

Donc $M'_1 = M_2$, et par conséquent on a : $R(M_1) = M_2$.

2)a- Montrons que $(MM_1) \perp (OM_1)$ et $(MM_2) \perp (OM_2)$

Signalons d'abord que $M_1 \neq O$ et $M_2 \neq O$ (car $z_{M_1} \neq 0$ et $z_{M_2} \neq 0$, vu que $m \neq 0$)

$$\text{On a : } \frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_1} - z_O} = \frac{\frac{m}{2}(1-i) - m}{\frac{m}{2}(1-i)} = \frac{-\frac{m}{2}(1+i)}{\frac{m}{2}(1-i)} = -i, \text{ donc } (MM_1) \perp (OM_1).$$

$$\text{On a : } \frac{z_{M_2} - z_M}{z_{M_2} - z_O} = \frac{\frac{m}{2}(1+i) - m}{\frac{m}{2}(1-i)} = \frac{\frac{m}{2}(-1+i)}{\frac{m}{2}(1+i)} = i, \text{ donc } (MM_2) \perp (OM_2).$$

2)b- Vérifions que $OM_1 = OM_2 = 1$

$$\text{On a : } OM_1 = |z_1| = \left| e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} \right| = 1 \text{ et comme : } OM_2 = OM_1 \text{ (car } R(M_1) = M_2 \text{) alors } OM_1 = OM_2 = 1$$

2)c- Déterminons la nature du quadrilatère OM_1MM_2 .

Après analyse rapide des résultats précédents on peut répondre que c'est un carré.

En effet, Comme $R(M_1) = M_2$ alors les trois points O , M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

Comme $(MM_1) \perp (OM_1)$, $(MM_2) \perp (OM_2)$ et $(OM_1) \perp (OM_2)$ (car $(\overline{OM_1}, \overline{OM_2}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$)

Alors $(OM_1) \parallel (MM_2)$ et $(OM_2) \parallel (M_1M)$ donc le quadrilatère OM_1MM_2 est un parallélogramme.

Et comme $OM_2 = OM_1$ et $(OM_1) \perp (M_1M)$ alors OM_1MM_2 est un carré.

$$3) \text{ Soit le point } H(h) \text{ tel que } h = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{i(2\theta)}.$$

3)a- Montrons que $\text{Re}(m-h) = 0$ et que $\text{Re}(1-h\bar{m}) = 0$.

$$\text{On a : } m = \sqrt{2}e^{i\theta} = \sqrt{2} \cos \theta + i\sqrt{2} \sin \theta \quad \text{Donc } \text{Re}(m) = \sqrt{2} \cos \theta$$

$$\text{et on a : } h = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{i(2\theta)} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{i\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \text{ donc}$$

$$\text{Re}(h) = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} \cdot \sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta = \sqrt{2} \cos \theta = \text{Re}(m)$$

Et comme $\text{Re}(m-h) = \text{Re}(m) - \text{Re}(h)$ alors $\text{Re}(m-h) = 0$.

$$\text{On a : } h\bar{m} = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{i(2\theta)} \cdot \sqrt{2} e^{-i\theta} = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{i\theta} = \frac{-i}{\sin \theta} (\cos \theta + i \sin \theta) = 1 - i \cot \theta$$

(A propos, $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, ça fait longtemps qu'elle a été abandonnée dans les programmes au Maroc)

Donc $1 - h\bar{m} = i \cot \theta$, on en déduit que $\text{Re}(1 - h\bar{m}) = 0$.

3)b- Montrons que $\text{Re}\left(\frac{a-h}{m+1}\right) = 0$

$$\text{On a : } \frac{a-h}{m+1} = \frac{1}{|m+1|^2} (1-h)(\overline{m+1}) = \frac{1}{|m+1|^2} (1-h)(\bar{m}+1) = \frac{1}{|m+1|^2} (\bar{m}+1-h\bar{m}-h) \text{ et comme}$$

$$\frac{1}{|m+1|^2} \in \mathbf{R} \text{ alors il suffit de montrer que } \text{Re}(\bar{m}+1-h\bar{m}-h) = 0.$$

$$\text{On a : } \text{Re}(\bar{m}+1-h\bar{m}-h) = \text{Re}(\bar{m}) + \text{Re}(1-h\bar{m}) - \text{Re}(h) = \text{Re}(m) - \text{Re}(h) + \text{Re}(1-h\bar{m}) = 0 + 0 = 0$$

$$(\text{ car } \text{Re}(\bar{m}) = \text{Re}(m))$$

Donc on a :: $\operatorname{Re}\left(\frac{a-h}{m+1}\right) = 0$.

3)c- Dédudisons que $(MH) \perp (AB)$ et $(AH) \perp (MB)$.

$$\text{On a : } z_A \neq z_B \text{ et } \frac{z_M - z_H}{z_A - z_B} = \frac{1}{2}(m-h) \text{ Donc } \operatorname{Re}\left(\frac{z_M - z_H}{z_A - z_B}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(m-h) = 0$$

$$\text{Donc } \frac{z_M - z_H}{z_A - z_B} \in i\mathbf{R}. \text{ D'où } (MH) \perp (AB).$$

$$\text{On a : } z_M \neq z_B \text{ et } \frac{z_A - z_H}{z_M - z_B} = \frac{a-h}{m+1} \text{ Donc } \operatorname{Re}\left(\frac{z_A - z_H}{z_M - z_B}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{a-h}{m+1}\right) = 0 \text{ Donc } \frac{z_A - z_H}{z_M - z_B} \in i\mathbf{R}.$$

D'où $(AH) \perp (MB)$.

4)a- Montrons que $\frac{h-z_1}{z_2-z_1} = \frac{1}{2}(1-\cot \theta)$.

On a :

$$\frac{h-z_1}{z_2-z_1} = \frac{h-\frac{m}{2}(1-i)}{mi} = \frac{hm-\frac{|m|^2}{2}(1-i)}{|m|^2 i} = \frac{hm-(1-i)}{2i} = \frac{-(1-hm)+i}{2i} = \frac{-i \cot \theta + i}{2i} = \frac{1}{2}(1-\cot \theta)$$

(car $|m|^2 = 2$ et $1-hm = i \cot \theta$ (voir 3)a))

4)b- Dédudisons que les points H , M_1 et M_2 sont alignés.

$$\text{On a : } \frac{z_H - z_{M_1}}{z_{M_2} - z_{M_1}} = \frac{h-z_1}{z_2-z_1} = \frac{1}{2}(1-\cot \theta) \text{ et comme } \frac{1}{2}(1-\cot \theta) \in \mathbf{R} \text{ alors } \frac{z_H - z_{M_1}}{z_{M_2} - z_{M_1}} \in \mathbf{R}.$$

Donc les points H , M_1 et M_2 sont alignés.

Exercice 3

Partie I

$$(A) \quad (F): 5u - 9v = 1$$

1) On constate que le couple $(2,1)$ est une solution particulière de (F) . On a : $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$.

2) Comme $(2,1)$ est une solution particulière de (F) alors son ensemble des solutions est :

$$\text{de } S_F = \left\{ \left(2 + k \frac{-9}{5 \wedge (-9)}, 1 - k \frac{5}{5 \wedge (-9)} \right) / k \in \mathbf{Z} \right\} = \{ (2-9k, 1-5k) / k \in \mathbf{Z} \}$$

3) Vérifions que $5^{u_0} \equiv 6[19]$ c.à.d que $5^2 \equiv 6[19]$.

$$\text{On a : } 5^2 = 25 = 1 \times 19 + 6 \text{ donc on a : } 5^2 \equiv 6[19].$$

$$(B) \quad (E): x^{2026} \equiv 5[19]$$

Soit x une solution éventuelle de (E) .

1)a- Montrons que $x \wedge 19 = 1$.

Comme 19 est premier alors on a : $x \wedge 19 = 1$ ou $x \wedge 19 = 19$.

Si on suppose que $x \wedge 19 = 19$ c.à.d $19 / x$ alors $x \equiv 0[19]$ donc $x^{2026} \equiv 0[19]$

Et comme $x^{2026} \equiv 5[19]$ alors $5 \equiv 0[19]$ donc $19 / 5$ ce qui est faux.

On en déduit que $x \wedge 19 = 1$

1)b- Montrons que $x^{10} \equiv 5[19]$.

On a : $2026 = 18 \times 112 + 10$ et comme $x^{2026} \equiv 5[19]$ alors $x^{18 \times 112 + 10} \equiv 5[19]$

c.à.d $(x^{18})^{112} x^{10} \equiv 5[19]$ et comme 19 est premier et $x \wedge 19 = 1$ alors d'après le théorème de Fermat, on a $x^{18} \equiv 1[19]$. Et par suite on a : $x^{10} \equiv 5[19]$.

1)c- Montrons que $x^2 \equiv 6[19]$.

On a : $x^{10} \equiv 5[19]$ donc $(x^{10})^2 \equiv 5^2[19]$ c.à.d $x^{20} \equiv 25[19]$ donc $x^{18} x^2 \equiv 25[19]$

Et comme $x^{18} \equiv 1[19]$ et $25 \equiv 6[19]$ alors $x^2 \equiv 6[19]$.

1)d- Montrons que $x \equiv 5[19]$ ou $x \equiv -5[19]$.

On a : $x^2 \equiv 6[19]$ et $6 \equiv 5^2[19]$ alors $x^2 \equiv 5^2[19]$ donc on a : $x^2 - 5^2 \equiv 0[19]$

Donc on a : $19 / (x-5)(x+5)$ et comme 19 est premier alors $19 / x-5$ ou $19 / x+5$

D'où on a : $x \equiv 5[19]$ ou $x \equiv -5[19]$.

2) Dans ce qui a précédé on a montré que si x une solution de (E) alors on a nécessairement $x \equiv 5[19]$ ou $x \equiv -5[19]$.

Réciproquement, supposons que $x \equiv 5[19]$ ou $x \equiv -5[19]$ et montrons que x une solution de (E)

Comme $x \equiv 5[19]$ ou $x \equiv -5[19]$ alors $x^{2026} \equiv 5^{2026}[19]$ (2026 est paire)

Et comme $5^{2026} = (5^{18})^{112} 5^{10}$ et comme 19 est premier et $5 \wedge 19 = 1$ alors d'après le théorème de Fermat, on a $5^{18} \equiv 1[19]$. Et par suite on a : $5^{2026} \equiv 5^{10}[19]$.

Et comme $5^{10} \equiv (5^2)^5[19]$ et $(5^2)^5 \equiv 6^5[19]$ et $6^5 \equiv 36 \times 36 \times 6[19]$ et $36 \times 36 \times 6 \equiv (-2) \times (-2) \times 6[19]$ et $(-2) \times (-2) \times 6 \equiv 24[19]$ et $24 \equiv 5[19]$ alors $x^{2026} \equiv 5[19]$.

D'où x une solution de (E).

On en conclut que l'ensemble des solutions de (E) est $S_F = \{5 + 19k / k \in \mathbf{Z}\} \cup \{-5 + 19k / k \in \mathbf{Z}\}$

Partie II

1) Les solutions de (E) compris entre 1 et 100 sont 5,14,24,33,43,52,62,71,81,90,100

Donc $V = \{5, 14, 24, 33, 43, 52, 62, 71, 81, 90, 100\}$

On a : $P(V) = \frac{\text{card}V}{\text{card}\Omega} = \frac{11}{100} = 0,11$. ($\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$)

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$

On a une situation d'épreuve répétée n fois et dans les mêmes conditions où à chaque fois on s'intéresse à la réalisation ou à la non réalisation de l'événement V .

La probabilité pour que V se réalise exactement k fois est $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ avec $p = P(V) = 0,11$. Soit A l'événement : « l'événement V se réalise au moins une fois »

L'événement contraire de A est $\bar{A}$: « l'événement V se réalise 0 une fois »

On a : $P(\bar{A}) = C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} = (0,89)^n$ et comme $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (0,89)^n$

Et on a : $P(A) > 0,95 \Leftrightarrow 1 - (0,89)^n > 0,95$ c.à.d $n > \frac{\ln(1,95)}{\ln(0,89)}$ et comme $\frac{\ln(1,95)}{\ln(0,89)} \approx 25,7$

Alors la plus valeur de n cherchée est 26.

Exercice 4

On rappelle que $(M_3(\mathbf{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbf{R}, \text{ on pose } M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'ensemble $E = \{M(x) / x \in \mathbf{R}\}$.

1) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ On a :

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y^2 & 1-y & y \\ y^2+2y & -y & y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 + (1-x)y^2 + x(y^2+2y) & (1-x)(1-y) - xy & y(1-x) + x(y+1) \\ x^2+2x-xy^2 + (x+1)(y^2+2y) & -x(1-y) - y(x+1) & -xy + (x+1)(y+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (x+y)^2 & 1-(x+y) & x+y \\ (x+y)^2+2(x+y) & -(x+y) & (x+y)+1 \end{pmatrix} = M(x+y) \end{aligned}$$

2) $\varphi: \mathbf{R} \mapsto M_3(\mathbf{R})$

$$x \mapsto \varphi(x) = M(x)$$

2)a- Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbf{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbf{R}), \times)$.

$$\text{On a } \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \varphi(x+y) = M(x+y) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

Donc φ est un morphisme de $(\mathbf{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbf{R}), \times)$.

$$\text{On a : } E = \{M(x) / x \in \mathbf{R}\} = \{\varphi(x) / x \in \mathbf{R}\} = \varphi(\mathbf{R})$$

2)b- Comme φ est un morphisme de $(\mathbf{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbf{R}), \times)$ et comme $(\mathbf{R}, +)$ est un groupe commutatif alors $(\varphi(\mathbf{R}), \times)$ est un groupe commutatif et comme $\varphi(\mathbf{R}) = E$ alors $(E, \times)$ est un groupe commutatif.

3) $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : M(x) T M(y) = M(2xy)$

3)a- Montrons que $(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.

Montrons d'abord que $E \setminus \{I\}$ est partie stable de (E, T)

Soit $(M(x), M(y)) \in (E \setminus \{I\})^2$, donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On a : $M(x) T M(y) = M(2xy)$ et comme $2xy \neq 0$ alors $M(2xy) \in (E \setminus \{I\})$ et donc $M(x) T M(y) \in (E \setminus \{I\})$.

D'où $E \setminus \{I\}$ est partie stable de (E, T) .

Montrons T est commutative dans $E \setminus \{I\}$.

$$\text{Comme } \forall (M(x), M(y)) \in (E \setminus \{I\})^2 : M(x) T M(y) = M(2xy) = M(2yx) = M(y) T M(x)$$

Donc T est commutative dans $E \setminus \{I\}$.

Montrons T est associative dans $E \setminus \{I\}$.

Soit $(M(x), M(y), M(z)) \in (E \setminus \{I\})^3$, on a :

$$(M(x)TM(y))TM(z) = M(2xy)TM(z) = M(2(2yx)z) = M(2x(2yz)) = M(x)T(M(y)TM(z))$$

Donc T est associative dans $E \setminus \{I\}$.

Comme $\forall M(x) \in (E \setminus \{I\}) : M(x)TM\left(\frac{1}{2}\right) = M\left(2x \cdot \frac{1}{2}\right) = M(x)$ et T est commutative dans $E \setminus \{I\}$

et $M\left(\frac{1}{2}\right) \in E \setminus \{I\}$ alors $M\left(\frac{1}{2}\right)$ est l'élément neutre de $(E \setminus \{I\}, T)$.

Montrons que tout élément de $E \setminus \{I\}$ est symétrisable dans $(E \setminus \{I\}, T)$

Comme $\forall M(x) \in (E \setminus \{I\}) : M(x)TM\left(\frac{1}{4x}\right) = M\left(2x \cdot \frac{1}{4x}\right) = M\left(\frac{1}{2}\right)$ et T est commutative dans

$E \setminus \{I\}$ alors tout élément $M(x)$ de $(E \setminus \{I\})$ est symétrisable de symétrique $M\left(\frac{1}{4x}\right)$ (et comme

$\frac{1}{4x} \neq 0$ alors $M\left(\frac{1}{4x}\right) \in (E \setminus \{I\})$).

Et par suite $(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.

3)b- Montrons que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

On a déjà montrer que $(E, \times)$ est un groupe commutatif et que $(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe commutatif, donc il reste à montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $\times$ dans E .

Soit $(M(x), M(y), M(z)) \in (E \setminus \{I\})^3$, on a :

$$\begin{aligned} M(x)T(M(y) \times M(z)) &= M(x)TM(y+z) = M(2x(y+z)) = M(2xy + 2xz) \\ &= M(2xy) \times M(2xz) = (M(x)TM(y)) \times (M(x)TM(z)) \end{aligned}$$

Et T est commutative dans $E \setminus \{I\}$ alors T est distributive par rapport à la loi $\times$ dans E .

Et par suite $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

4)a- Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbf{N}) : (M(x))^n = M(nx)$

Pour $n=0$, on a : $(M(x))^0 = I = M(0) = M(0x)$. Donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons $(M(x))^n = M(nx)$ et montrons que $(M(x))^{n+1} = M((n+1)x)$.

$$\text{On a : } (M(x))^{n+1} = (M(x))^n M(x) \stackrel{\text{SHR}}{=} M(nx)M(x) = M(nx+x) = M((n+1)x)$$

On conclut d'après le principe de récurrence que l'on a : $(\forall n \in \mathbf{N}) : (M(x))^n = M(nx)$.

4)b- Soit $X \in E$, posons $X = M(x)$

On a:

$$\begin{aligned}
 X^3 - X^2 &= (M(x))^3 - (M(x))^2 = M(3x) - M(2x) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9x^2 & 1-3x & 3x \\ 9x^2+6x & -3x & 3x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4x^2 & 1-2x & 2x \\ 4x^2+4x & -2x & 2x+1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9x^2-4x^2 & 2x-3x & 3x-2x \\ 9x^2+6x-4x^2-4x & -3x+2x & 3x-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5x^2 & -x & x \\ 5x^2+2x & -x & x \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc

$$X^3 - X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5x^2 & -x & x \\ 5x^2+2x & -x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 = 5 \text{ et } -x = 1 \text{ et } x = -1 \text{ et } 5x^2 + 2x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$\Leftrightarrow X = M(-1)$$

Donc l'équation admet la matrice $M(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme unique solution dans E .

End

J'espère avoir été aussi clair que possible

Toute remarque ou suggestion de votre part est la bienvenue

Mr El abbassi Mohammed

elabbassimed2014@gmail.com

Tel : 0613332835



الصفحة 1 11 11	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 - المسالك الدولية		السلطة المغربية ROYAUME DU MAROC  وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة ROYAUME DU MAROC المركز الوطني للامتحانات المدرسية وتقييم التعليمات
NS 24F	الموضوع		
4س	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة والمسلك

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse(10 pts)
- L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique et aux probabilités...(3 pts)
- L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

الصفحة	موضوع الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 - المسالك الدولية مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	NS 24F
11 / 2 ١١		

EXERCICE1 : (10 points)

Partie I:

0.25 pt	1- a) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$	
---------	---	---

0.25 pt	1- b) En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[, \frac{x^2}{2} + 1 + x \leq e^x$	
---------	--	---

2- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $I(x) = \int_0^x te^{-t} dt$

0.25 pt	2- a) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[, I(x) \leq \frac{x^2}{2}$	
---------	--	---

0.5 pt	2- b) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[, I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$	
--------	---	---

3- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

0.5 pt	3-a) En utilisant les résultats des questions 1- b) et 2- b) de la partie I, montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}$	
--------	--	---

0.25 pt	3- b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2}$	
---------	--	---

الصفحة	موضوع الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 المسالك الدولية مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	NS 24F
11 / 3		

Partie II :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[; f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}} \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0.5 pt	1- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.	
0.25 pt	2- Montrer que f est continue à droite en 0	
0.25 pt	3- a) Montrer que: $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{f(x) - f(0)}{x} = -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right)$	
0.25 pt	3- b) Montrer que: $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = 2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x}$	
0.25 pt	3- c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$	

4- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $J(x) = \int_0^x te^t dt$

0.5 pt	4- a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leq I(x) \leq J(x)$	
--------	--	---

الصفحة	موضوع الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 - المسالك الدولية مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	NS 24F
11 / 4 μ		

0.25 pt	4- b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $J(x) = (x - 1)e^x + 1$	
0.5 pt	4- c) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$	
0.25 pt	4- d) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$	
0.25 pt	5- Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer. On note f^{-1} la bijection réciproque de la fonction f	
0.5 pt	6- a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α à déterminer dans $[0, +\infty[$	
0.5 pt	6-b) Représenter graphiquement la courbe (C) et la courbe (C') de la fonction f^{-1} dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (On prendra $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2\text{ cm}$). (On admet que le point $P(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion pour la courbe (C) avec $x_0 \simeq 1,6$ et $f(x_0) \simeq 0,3$)	

الصفحة	موضوع الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 المسالك الدولية مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	NS 24F
11 / 5 μ		

7- On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n)$

0.25 pt	7-a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$	
0.5 pt	7-b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} u_n - \alpha $ (On admet que $\forall x \in]0, +\infty[, -\frac{1}{2} < f'(x) < 0$)	
0.5 pt	7- c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$	
0.25 pt	7- d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α	

Partie III :

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.

0.5 pt	1- a) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq F(x) \leq x f(x)$	
0.25 pt	1- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$	

الصفحة	موضوع الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 المسالك الدولية مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	NS 24F
11 / 6 _μ		

0.25 pt	1-c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.	
0.25 pt	2- a) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$	
0.5 pt	2- b) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[, F'(x) = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1)$	
0.5 pt	2- c) Montrer que $F(\ln(2 + \sqrt{3}))$ est un extremum de la fonction F sur $[0, +\infty[$	

EXERCICE2 : (3.5 points)

Soit le nombre complexe $m = \sqrt{2}e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$

Partie I:

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z

$$(E_m) : \overline{m} z^2 - 2z + m = 0$$

0.25 pt	1- Étant donné que le nombre complexe $z_1 = \frac{m(1-i)}{2}$ est une solution de l'équation (E_m) , déduire que sa deuxième solution est : $z_2 = \frac{m(1+i)}{2}$	
0.25 pt	2- Écrire z_1 sous forme exponentielle.	

الصفحة	موضوع الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 - المسالك الدولية	NS 24F
11 / 7 μ	مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	

Partie II :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives $a = 1, b = -1, m, z_1$ et z_2
Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0.25 pt	1- Montrer que : $R(M_1) = M_2$	
---------	---------------------------------	---

0.5 pt	2-a) Montrer que $(MM_1) \perp (OM_1)$ et $(MM_2) \perp (OM_2)$	
--------	---	---

0.25 pt	2-b) Vérifier que : $OM_1 = OM_2 = 1$	
---------	---------------------------------------	---

0.25 pt	2- c) Déterminer la nature du quadrilatère OM_1MM_2	
---------	---	---

3- Soit H le point d'affixe $h = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin(\theta)} e^{i(2\theta)}$

Pour tout nombre complexe z , on désigne par $\text{Re}(z)$ la partie réelle de z

0.5 pt	3-a) Montrer que $\text{Re}(m - h) = 0$ et que $\text{Re}(1 - h \overline{m}) = 0$	
--------	--	---

0.25 pt	3- b) Montrer que : $\text{Re} \left(\frac{a - h}{m + 1} \right) = 0$	
---------	--	---

الصفحة	موضوع الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 - المسالك الدولية	NS 24F
11 / 8 μ	مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	

0.5 pt	3- c) En déduire que $(MH) \perp (AB)$ et que $(AH) \perp (MB)$	
--------	---	---

0.25 pt	4-a) Montrer que : $\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2}(1 - \cotan(\theta))$	
---------	--	---

0.25 pt	4-b) En déduire que les points H , M_1 et M_2 sont alignés.	
---------	---	---

EXERCICE3 : (3 points)

Partie I :

A. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante (F) : $5u - 9v = 1$

0.25 pt	1- Donner une solution particulière (u_0, v_0) dans $\mathbb{N}^2$ de (F)	
---------	---	---

0.25 pt	2- Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (F)	
---------	--	---

0.25 pt	3- Vérifier que : $5^{u_0} \equiv 6 [19]$	
---------	---	---

الصفحة	موضوع الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 - المسالك الدولية مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	NS 24F
11 / 9 μ		

B. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante $(E) : x^{2026} \equiv 5 [19]$

1- Soit x une solution de l'équation (E)

0.5 pt	1- a) Montrer que x et 19 sont premiers entre eux et que $x^{18} \equiv 1 [19]$	
0.25 pt	1- b) Montrer que : $x^{10} \equiv 5 [19]$	
0.25 pt	1- c) En déduire que : $x^2 \equiv 6 [19]$ (On pourra utiliser les résultats de la partie A)	
0.25 pt	1- d) Montrer que $x \equiv 5 [19]$ ou $x \equiv -5 [19]$	
0.5 pt	2- Montrer que si $x \equiv 5 [19]$ ou $x \equiv -5 [19]$ alors x est solution de l'équation (E)	

Partie II :

On considère une urne contenant 100 boules numérotées de 1 à 100 indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard de cette urne.

On considère l'événement V : « Le numéro de la boule tirée est solution de l'équation (E) »

0.25 pt	1- Montrer que la probabilité de l'événement V est $p = 0,11$	
---------	---	---

الصفحة	موضوع الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 المسالك الدولية مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	NS 24F
11 / 10 μ		

0.25 pt	2- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne. Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité de "réalisation de l'événement V au moins une fois", soit strictement supérieure à 0,95	
---------	--	---

EXERCICE4 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la matrice

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et d'unité la matrice } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On considère l'ensemble : } E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

0.5 pt	1- Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) \times M(y) = M(x+y)$	
--------	--	---

2- On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) = M(x)$

0.5 pt	2- a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ et que $\varphi(\mathbb{R}) = E$	
--------	---	---

0.25 pt	2- b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.	
---------	--	---

3- On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) T M(y) = M(2xy).$$

0.75 pt	3- a) Montrer que $(E - \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.	
---------	--	---

الصفحة	موضوع الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 - المسالك الدولية مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	NS 24F
11 / 11 μ		

0.5 pt	3- b) Montrer que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.	
--------	---	---

4- Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $(M(x))^n = \underbrace{M(x) \times \dots \times M(x)}_{n \text{ fois}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

0.5 pt	4- a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (M(x))^n = M(nx)$	
--------	--	---

0.5 pt	4- b) Résoudre dans E l'équation : $X^3 - X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.	
--------	--	--

FIN

